

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

А.А.Самарский  
П.Н.Вабищевич

РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНЫХ  
ЗАДАЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ**



URSS

**А. А. Самарский  
П. Н. Вабищевич**

**ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ**

Издание третье



**URSS  
МОСКВА**

**Самарский Александр Андреевич,  
Вабищевич Петр Николаевич**

**Численные методы решения обратных задач математической физики:**  
Учебное пособие. Изд. 3-е. — М.: Издательство ЛКИ, 2009. — 480 с.

В традиционных курсах по методам решения задач математической физики рассматриваются прямые задачи. При этом решение определяется из уравнений с частными производными, которые дополняются определенными краевыми и начальными условиями. В обратных задачах некоторые из этих составляющих постановки задачи отсутствуют. Неизвестными могут быть, например, начальные условия, граничные режимы, коэффициенты и правые части уравнений. Обратные задачи часто являются некорректными в классическом смысле, и для их приближенного решения приходится применять методы регуляризации. В книге рассмотрены основные классы обратных задач для уравнений математической физики и численные методы их решения.

Книга рассчитана на студентов университетов и вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», и специалистов по вычислительной математике и математическому моделированию.

Издательство ЛКИ. 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 30. Зак. № 421

Отпечатано с готовых диалозитивов в ООО «Полиграфический комбинат «Зауралье»  
640022, Курган, ул. К. Маркса, 106

ISBN 978–5–382–00990–2

© Издательство ЛКИ, 2009



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещена в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	9
Основные обозначения . . . . .	11
<b>Глава 1. Обратные задачи математической физики . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1. Краевые задачи . . . . .	12
1.1.1. Стационарные задачи математической физики . . . . .	13
1.1.2. Нестационарные задачи математической физики . . . . .	14
1.2. Корректные задачи для уравнений с частными производными . . . . .	15
1.2.1. Понятие корректности . . . . .	15
1.2.2. Краевая задача для параболического уравнения . . . . .	16
1.2.3. Краевая задача для эллиптического уравнения . . . . .	19
1.3. Некорректные задачи . . . . .	21
1.3.1. Пример некорректной задачи . . . . .	21
1.3.2. Понятие условно корректной задачи . . . . .	23
1.3.3. Условная корректность задачи с обратным временем . . . . .	23
1.4. Классификация обратных задач математической физики . . . . .	24
1.4.1. Прямые и обратные задачи . . . . .	25
1.4.2. Коэффициентные обратные задачи . . . . .	26
1.4.3. Граничные обратные задачи . . . . .	27
1.4.4. Эволюционные обратные задачи . . . . .	28
1.5. Задачи и упражнения . . . . .	28
<b>Глава 2. Краевые задачи для обыкновенных     дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1. Сеточная задача . . . . .	31
2.1.1. Модельная дифференциальная задача . . . . .	31
2.1.2. Разностная схема . . . . .	33
2.1.3. Схемы метода конечных элементов . . . . .	36
2.1.4. Метод баланса . . . . .	37
2.2. Сходимость разностных схем . . . . .	39
2.2.1. Разностные тождества . . . . .	39
2.2.2. Свойства разностного оператора $A$ . . . . .	41
2.2.3. Точность разностных схем . . . . .	43
2.3. Решение сеточной задачи . . . . .	44
2.3.1. Метод прогонки . . . . .	44



2.3.2. Корректность алгоритма прогонки . . . . .	45
2.3.3. Метод Гаусса . . . . .	46
2.4. Программная реализация и примеры расчетов . . . . .	47
2.4.1. Постановка задачи . . . . .	48
2.4.2. Разностные схемы . . . . .	49
2.4.3. Программа . . . . .	51
2.4.4. Результаты расчетов . . . . .	57
2.5. Задачи и упражнения . . . . .	57
<b>Глава 3. Краевые задачи для эллиптических уравнений . . . . .</b>	<b>62</b>
3.1. Сеточная эллиптическая задача . . . . .	62
3.1.1. Краевые задачи . . . . .	63
3.1.2. Сеточная задача . . . . .	63
3.1.3. Задачи в нерегулярных областях . . . . .	65
3.2. Погрешность приближенного решения . . . . .	67
3.2.1. Сеточные эллиптические операторы . . . . .	67
3.2.2. Сходимость разностного решения . . . . .	69
3.2.3. Принцип максимума . . . . .	70
3.3. Итерационные методы решения сеточных задач . . . . .	72
3.3.1. Прямые методы решения сеточных задач . . . . .	72
3.3.2. Итерационные методы . . . . .	74
3.3.3. Примеры двухслойных итерационных методов . . . . .	76
3.3.4. Итерационные методы вариационного типа . . . . .	78
3.3.5. Итерационные методы с диагональным переобуславливателем . . . . .	80
3.3.6. Попеременно-треугольные итерационные методы . . . . .	81
3.4. Программная реализация и примеры расчетов . . . . .	84
3.4.1. Постановка задачи и разностная схема . . . . .	84
3.4.2. Подпрограмма для решения сеточных уравнений . . . . .	85
3.4.3. Программа . . . . .	94
3.4.4. Результаты расчетов . . . . .	99
3.5. Задачи и упражнения . . . . .	102
<b>Глава 4. Краевые задачи для параболических уравнений . . . . .</b>	<b>106</b>
4.1. Разностные схемы . . . . .	106
4.1.1. Краевые задачи . . . . .	106
4.1.2. Аппроксимация по пространству . . . . .	108
4.1.3. Аппроксимация по времени . . . . .	109
4.2. Устойчивость двухслойных разностных схем . . . . .	111
4.2.1. Основные понятия . . . . .	112
4.2.2. Устойчивость по начальным данным . . . . .	114
4.2.3. Устойчивость по правой части . . . . .	117
4.3. Трехслойные операторно-разностные схемы . . . . .	119

4.3.1. Устойчивость по начальным данным . . . . .	119
4.3.2. Переход к двухслойной схеме . . . . .	121
4.3.3. $\rho$ -устойчивость трехслойных схем . . . . .	123
4.3.4. Оценки в более простых нормах . . . . .	125
4.3.5. Устойчивость по правой части . . . . .	127
4.4. Исследование разностных схем для модельной задачи . . . . .	128
4.4.1. Условия устойчивости двухслойной схемы . . . . .	128
4.4.2. Сходимость разностных схем . . . . .	129
4.4.3. Устойчивость трехслойных схем с весами . . . . .	130
4.5. Программная реализация и примеры расчетов . . . . .	132
4.5.1. Постановка задачи . . . . .	132
4.5.2. Линеаризованные разностные схемы . . . . .	133
4.5.3. Программа . . . . .	136
4.5.4. Примеры расчетов . . . . .	139
4.6. Задачи и упражнения . . . . .	142
<b>Глава 5. Методы решения некорректных задач . . . . .</b>	<b>145</b>
5.1. Метод регуляризации А. Н. Тихонова . . . . .	145
5.1.1. Постановка задачи . . . . .	145
5.1.2. Вариационный метод . . . . .	146
5.1.3. Сходимость метода регуляризации . . . . .	147
5.2. Скорость сходимости метода регуляризации . . . . .	150
5.2.1. Уравнение Эйлера для сглаживающего функционала . . . . .	150
5.2.2. Классы априорных ограничений на решение . . . . .	151
5.2.3. Оценки скорости сходимости . . . . .	152
5.3. Выбор параметра регуляризации . . . . .	153
5.3.1. Выбор в классе априорных ограничений на решение . . . . .	153
5.3.2. Метод невязки . . . . .	155
5.3.3. Другие способы выбора параметра регуляризации . . . . .	156
5.4. Итерационные методы решения некорректных задач . . . . .	156
5.4.1. Особенности применения итерационных методов . . . . .	157
5.4.2. Итерационное решение некорректной задачи . . . . .	158
5.4.3. Оценки скорости сходимости . . . . .	160
5.4.4. Обобщения . . . . .	162
5.5. Программная реализация и примеры расчетов . . . . .	163
5.5.1. Задача продолжения потенциала . . . . .	163
5.5.2. Интегральное уравнение . . . . .	166
5.5.3. Вычислительная реализация . . . . .	167
5.5.4. Программа . . . . .	168
5.5.5. Результаты расчетов . . . . .	172
5.6. Задачи и упражнения . . . . .	175

<b>Глава 6. Идентификация правой части</b> . . . . .	<b>178</b>
6.1. Восстановление правой части стационарных задач	
по известному решению . . . . .	178
6.1.1. Постановка задачи . . . . .	179
6.1.2. Разностные алгоритмы . . . . .	180
6.1.3. Регуляризация по А. Н. Тихонову . . . . .	183
6.1.4. Другие алгоритмы . . . . .	185
6.1.5. Вычислительная и программная реализация . . . . .	186
6.1.6. Примеры расчетов . . . . .	194
6.2. Идентификация правой части параболического уравнения .	196
6.2.1. Модельная задача . . . . .	196
6.2.2. Глобальная регуляризация . . . . .	199
6.2.3. Локальная регуляризация . . . . .	201
6.2.4. Итерационное решение задачи идентификации . . . . .	203
6.2.5. Результаты расчетов . . . . .	213
6.3. Восстановление зависимости правой части от времени . . .	216
6.3.1. Обратная задача . . . . .	216
6.3.2. Краевая задача для нагруженного уравнения . . . . .	217
6.3.3. Разностная схема . . . . .	218
6.3.4. Сеточная нелокальная задача и программная реализация . .	219
6.3.5. Примеры расчетов . . . . .	224
6.4. Идентификация постоянной во времени правой части	
параболического уравнения . . . . .	226
6.4.1. Постановка задачи . . . . .	226
6.4.2. Оценка устойчивости . . . . .	227
6.4.3. Разностная задача . . . . .	230
6.4.4. Решение сеточной задачи . . . . .	232
6.4.5. Результаты расчетов . . . . .	241
6.5. Восстановление правой части эллиптического уравнения	
по данным граничных наблюдений . . . . .	242
6.5.1. Постановка обратной задачи . . . . .	243
6.5.2. Единственность решения обратной задачи . . . . .	245
6.5.3. Разностная задача . . . . .	246
6.5.4. Решение сеточной задачи . . . . .	250
6.5.5. Программа . . . . .	253
6.5.6. Результаты расчетов . . . . .	261
6.6. Задачи и упражнения . . . . .	262
<b>Глава 7. Эволюционные обратные задачи</b> . . . . .	<b>267</b>
7.1. Нелокальное возмущение начальных условий . . . . .	267
7.1.1. Постановка задачи . . . . .	268
7.1.2. Общие методы решения некорректных	
эволюционных задач . . . . .	269

7.1.3. Возмущение начальных условий . . . . .	271
7.1.4. Сходимость приближенного решения к точному . . . . .	273
7.1.5. Эквивалентность нелокальной задачи и задачи оптимального управления . . . . .	277
7.1.6. Разностные нелокальные задачи . . . . .	280
7.1.7. Программная реализация . . . . .	284
7.1.8. Результаты расчетов . . . . .	288
7.2. Регуляризованные разностные схемы . . . . .	289
7.2.1. Принцип регуляризации разностных схем . . . . .	290
7.2.2. Задача с обратным временем . . . . .	296
7.2.3. Метод квазиобращения . . . . .	298
7.2.4. Регуляризованные аддитивные схемы . . . . .	307
7.2.5. Программа . . . . .	311
7.2.6. Примеры расчетов . . . . .	318
7.3. Итерационное решение ретроспективной задачи . . . . .	321
7.3.1. Постановка задачи . . . . .	321
7.3.2. Разностная задача . . . . .	322
7.3.3. Итерационное уточнение начального условия . . . . .	323
7.3.4. Программа . . . . .	326
7.3.5. Результаты расчетов . . . . .	333
7.4. Эволюционное уравнение второго порядка . . . . .	335
7.4.1. Модельная задача . . . . .	335
7.4.2. Эквивалентное уравнение первого порядка . . . . .	338
7.4.3. Возмущение начальных условий . . . . .	340
7.4.4. Возмущение уравнения . . . . .	343
7.4.5. Регуляризованные разностные схемы . . . . .	346
7.4.6. Программа . . . . .	350
7.4.7. Примеры расчетов . . . . .	356
7.5. Продолжение нестационарных полей по данным точечных наблюдений . . . . .	357
7.5.1. Постановка задачи . . . . .	357
7.5.2. Вариационная задача . . . . .	360
7.5.3. Сеточная задача . . . . .	362
7.5.4. Численное решение сеточной задачи . . . . .	364
7.5.5. Программа . . . . .	366
7.5.6. Примеры расчетов . . . . .	374
7.6. Задачи и упражнения . . . . .	377
<b>Глава 8. Другие задачи . . . . .</b>	<b>379</b>
8.1. Продолжение по пространственной переменной в граничной обратной задаче . . . . .	379
8.1.1. Постановка задачи . . . . .	380
8.1.2. Метод квазиобращения . . . . .	381
8.1.3. Разностные схемы метода квазиобращения . . . . .	384

8.1.4. Программа . . . . .	388
8.1.5. Примеры расчетов . . . . .	394
8.2. Нелокальное возмущение граничных условий . . . . .	397
8.2.1. Модельная задача . . . . .	397
8.2.2. Нелокальная краевая задача . . . . .	398
8.2.3. Локальная регуляризация . . . . .	398
8.2.4. Разностная нелокальная задача . . . . .	401
8.2.5. Программа . . . . .	402
8.2.6. Примеры расчетов . . . . .	408
8.3. Идентификация граничного режима в двумерной задаче . . . . .	410
8.3.1. Постановка задачи . . . . .	411
8.3.2. Итерационный метод . . . . .	412
8.3.3. Сеточная задача . . . . .	415
8.3.4. Итерационное уточнение граничного условия . . . . .	417
8.3.5. Программная реализация . . . . .	420
8.3.6. Примеры расчетов . . . . .	428
8.4. Коэффициентная обратная задача для нелинейного параболического уравнения . . . . .	429
8.4.1. Постановка задачи . . . . .	429
8.4.2. Функциональная оптимизация . . . . .	435
8.4.3. Параметрическая оптимизация . . . . .	438
8.4.4. Сеточная задача . . . . .	442
8.4.5. Программа . . . . .	444
8.4.6. Примеры расчетов . . . . .	451
8.5. Коэффициентная обратная задача для эллиптического уравнения . . . . .	454
8.5.1. Постановка задачи . . . . .	454
8.5.2. О единственности решения обратной задачи . . . . .	455
8.5.3. Сеточная обратная задача . . . . .	457
8.5.4. Итерационное решение обратной задачи . . . . .	459
8.5.5. Программа . . . . .	461
8.5.6. Результаты расчетов . . . . .	468
8.6. Задачи и упражнения . . . . .	471
<b>Литература . . . . .</b>	<b>475</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>477</b>

# Предисловие

Прикладные проблемы приводят к необходимости решения краевых задач для уравнений с частными производными. Разработка приближенных методов их решения базируется на построении и исследовании численных методов решения краевых задач для базовых (основных, модельных) уравнений математической физики. В качестве таковых при рассмотрении уравнений второго порядка выделяются эллиптические, параболические и гиперболические уравнения.

Решение краевой задачи определяется из уравнения и некоторых дополнительных условий. Для стационарных уравнений задаются граничные условия, а для нестационарных — еще и начальные условия. Такие классические задачи рассматриваются во всех учебных руководствах по уравнениям математической физики и дифференциальным уравнениям с частными производными.

Отмеченные краевые задачи относятся к классу прямых задач математической физики. Типичным примером обратной задачи служат задачи определения неизвестных коэффициентов уравнения по некоторой дополнительной информации о решении — в этом случае говорят о коэффициентной обратной задаче. В граничных обратных задачах восстанавливаются неизвестные граничные условия и т. д.

Обратные задачи математической физики часто принадлежат к классу некорректных в классическом смысле задач. Некорректность обусловлена, прежде всего, отсутствием непрерывной зависимости решения от входных данных. В этом случае приходится сужать класс допустимых решений и использовать специальные регуляризирующие процедуры для нахождения устойчивого решения.

В настоящее время хорошо проработаны вопросы численного решения прямых задач математической физики. При решении многомерных краевых задач широко используются разностные методы и метод конечных элементов. Ощущается острая нехватка учебных пособий и монографий по численным методам решения обратных задач. Это явилось основным побудительным мотивом к написанию данной работы.

В книге не делается попытки *объять необъятное* и рассматриваются лишь некоторые обратные задачи для стационарных и нестационарных уравнений математической физики. Дается достаточно полное и замкнутое исследование основных проблем, которые возникают при приближенном решении обратных задач. Используется минимальный

математический аппарат, связанный с базовыми свойствами операторов в конечномерных пространствах.

При рассмотрении задач для дифференциальных уравнений отмечаются лишь некоторые основные моменты без всяких попыток последовательного и строгого исследования проблемы.

В становление проблематики теории и практики решения обратных задач математической физики определяющий вклад внесли российские математики и первым среди них был Андрей Николаевич Тихонов. Его идеи легли в основу современного здания прикладной математики и развиваются в работах его многочисленных учеников и последователей. Наша работа является данью светлой памяти А. Н. Тихонова.

Благодарим Г. В. Алексева, который внимательно прочитал рукопись и сделал много полезных замечаний.

# Основные обозначения

- $A, B, C, D, S$  — разностные операторы;  
 $E$  — единичный (тождественный) оператор;  
 $A^*$  — сопряженный оператор;  
 $A^{-1}$  — оператор, обратный оператору  $A$ ;  
 $A > 0$  — положительный оператор ( $(Ay, y) > 0$ , если  $y \neq 0$ );  
 $A \geq 0$  — неотрицательный оператор ( $(Ay, y) \geq 0$ );  
 $A \geq \delta E$ ,  $\delta > 0$  — положительно определенный оператор;  
 $A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*)$  — самосопряженная часть оператора  $A$ ;  
 $A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*)$  — кососимметричная часть оператора  $A$ ;  
 $H$  — гильбертово пространство сеточных функций;  
 $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $H$ ;  
 $\|\cdot\|$  — норма в  $H$ ;  
 $(y, v)_A = (Ay, v)$  — скалярное произведение в  $H_A$  (оператор  $A = A^* > 0$ );  
 $\|\cdot\|_A$  — норма в  $H_A$ ;  
 $L_2(\omega)$  — гильбертово пространство сеточных функций;  
 $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2$ ;  
 $\|A\|$  — норма разностного оператора  $A$ ;  
 $M, M_\beta$  — положительные постоянные;  
 $\Omega$  — расчетная область;  
 $\partial\Omega$  — граница  $\Omega$ ;  
 $\partial\omega$  — множество граничных узлов;  
 $h, h_\beta$  — шаги сетки по пространству;  
 $\tau$  — шаг сетки по времени;  
 $\sigma$  — весовой параметр разностной схемы;  
 $y_x = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$  — правая разностная производная в точке  $x$ ;  
 $y_{\bar{x}} = \frac{y(x) - y(x-h)}{h}$  — левая разностная производная в точке  $x$ ;  
 $y_x^\circ = \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}})$  — центральная разностная производная в точке  $x$ ;  
 $y_{\bar{x}x} = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{h}$  — вторая разностная производная в точке  $x$ ;  
 $y = y_n = y(x, t_n)$  — значение сеточной функции в точке  $x$  на момент времени  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;  
 $\alpha$  — параметр регуляризации;  
 $\delta$  — уровень погрешностей во входных данных.



## Глава 1

---

# Обратные задачи математической физики

Прямая задача математической физики связывается нами с классическими краевыми задачами математической физики и характеризуется необходимостью найти решение, которое удовлетворяет заданному уравнению с частными производными и некоторым начальным и граничным условиям. В обратных задачах определяющее уравнение и/или начальные, и/или граничные условия не заданы полностью, но зато есть некоторая дополнительная информация. При таком выделении обратных задач математической физики мы можем говорить о коэффициентных (уравнение полностью не задано — неизвестны некоторые коэффициенты уравнения), граничных (неизвестны граничные условия) и эволюционных (связанных с тем, что не задано начальное условие) обратных задачах математической физики. Обратные задачи часто являются некорректными в классическом смысле задачами. Типичным является нарушение требования непрерывной зависимости решения от входных данных. Введение в класс корректных задач достигается сужением класса допустимых решений.

### 1.1. Краевые задачи

Ядро прикладных математических моделей составляют уравнения с частными производными. Решение определяется из уравнений математической физики и некоторых дополнительных соотношений. В качестве дополнительных соотношений выступают, прежде всего, краевые и начальные условия. В курсах уравнений математической физики выделяют как наиболее важные для приложений уравнения второго порядка. Среди них отметим эллиптические, параболические и гиперболические уравнения.

### 1.1.1. Стационарные задачи математической физики

В качестве примера будем рассматривать двумерные краевые задачи. Решение  $u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  ищется в некоторой ограниченной области  $\Omega$  с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Оно определяется из эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.1)$$

На коэффициенты уравнения обычно накладываются ограничения

$$k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0, \quad q(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Типичным примером эллиптического уравнения (1.1) является уравнение Пуассона

$$-\Delta u \equiv -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2)$$

т. е. в уравнении (1.1)  $k(\mathbf{x}) = 1$ ,  $q(\mathbf{x}) = 0$ .

Для уравнения (1.1) будем рассматривать граничные условия первого рода

$$u(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

На границе области или ее части могут задаваться и граничные условия второго или третьего рода. В случае граничных условий третьего рода имеем

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(\mathbf{x})u = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.4)$$

где  $n$  — внешняя по отношению к  $\Omega$  нормаль.

Многие основные особенности стационарных задач математической физики, описываемых эллиптическими уравнениями второго порядка, можно проиллюстрировать при рассмотрении простейших краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Прототипом (1.1) выступает уравнение

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1.5)$$

с переменными коэффициентами

$$k(x) \geq \kappa > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Для однозначного определения неизвестной функции  $u(x)$  уравнение (1.5) дополняется двумя граничными условиями на концах отрезка  $[0, l]$ . Задаваться могут функция  $u(x)$  (граничное условие первого рода),

поток  $w(x) = -k(x)\frac{du}{dx}(x)$  (граничное условие второго рода) или же их линейная комбинация (граничное условие третьего рода):

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2; \quad (1.6)$$

$$-k(0)\frac{du}{dx}(0) = \mu_1, \quad k(l)\frac{du}{dx}(l) = \mu_2; \quad (1.7)$$

$$-k(0)\frac{du}{dx}(0) + \sigma_1 u(0) = \mu_1, \quad k(l)\frac{du}{dx}(l) + \sigma_2 u(l) = \mu_2. \quad (1.8)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$  — заданные константы.

### 1.1.2. Нестационарные задачи математической физики

В качестве базового нестационарного уравнения математической физики выступает **одномерное параболическое уравнение второго порядка**. Задача рассматривается в прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ищется решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.9)$$

Оно дополняется (первая краевая задача) граничными

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.10)$$

и начальным

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.11)$$

условиями. Для простоты мы ограничились однородными граничными условиями и зависимостью коэффициента  $k$  только от пространственной переменной, причем  $k(x) \geq \kappa > 0$ .

Вместо условий первого рода (1.10) могут задаваться другие граничные условия. Например, во многих прикладных задачах необходимо ориентироваться на использование граничных условий третьего рода:

$$\begin{aligned} -k(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \sigma_1(t)u(0, t) &= \mu_1(t), \\ k(l)\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \sigma_2(t)u(l, t) &= \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Среди других нестационарных краевых задач необходимо выделить задачу для **гиперболического уравнения второго порядка**. В одномерном

по пространству случае ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.13)$$

Для однозначного определения решения этого уравнения помимо граничных условий (1.10) задаются два начальных условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = u_1(t), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.14)$$

Особое внимание необходимо уделять многомерным нестационарным задачам математической физики. Примером служит двумерное параболическое уравнение. Будем искать в области  $\Omega$  функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (1.15)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

и условиям

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.17)$$

Аналогично формулируются и другие нестационарные многомерные краевые задачи для уравнений с частными производными.

## 1.2. Корректные задачи для уравнений с частными производными

Определяется понятие корректно поставленной краевой задачи, которое связывается с существованием единственного решения, непрерывно зависящего от входных данных. Приведены результаты об устойчивости классических краевых задач для уравнений с частными производными.

### 1.2.1. Понятие корректности

Граничные и начальные условия формулируются для того, чтобы из множества возможных решений дифференциального уравнения с частными производными выделить искомое. Этих дополнительных условий должно быть не очень много (решения должны существовать) и не очень мало (решений не должно быть много). С этим связано понятие корректной постановки задачи. Остановимся вначале на понятии **корректности задачи** по Ж. Адамару (корректность в классическом смысле).

Задача называется корректно поставленной, если:

- 1) решение задачи существует,
- 2) это решение единственно,
- 3) решение задачи зависит непрерывно от входных данных.

Особое значение имеет именно третье условие корректности, которое обеспечивает малость изменений решения при малом изменении входных данных. Входными данными выступают коэффициенты уравнения, правая часть, граничные и начальные данные, которые берутся из эксперимента и всегда известны с некоторой погрешностью. Устойчивость решения по отношению к малым возмущениям начальных и граничных условий, коэффициентов и правой части фактически оправдывает саму постановку задачи, ее познавательную сущность, ценность всего исследования.

При рассмотрении краевых задач для уравнений математической физики теоремы существования, единственности и устойчивости в своей совокупности обеспечивают полное исследование корректности поставленной задачи. Понятно, что условия корректности должны конкретизироваться при рассмотрении той или иной задачи. Это связано с тем, что решение задачи и входные данные рассматриваются как элементы некоторых вполне конкретных функциональных пространств. Поэтому поставленная задача может быть некорректна при одном выборе пространств и корректна — при другом. Поэтому утверждения о том что та или иная задача корректна (некорректна) не носят абсолютного характера и должны сопровождаться необходимыми оговорками.

### 1.2.2. Краевая задача для параболического уравнения

Некоторые основные вопросы исследования корректности краевых задач математической физики проиллюстрируем на примере простейшей краевой задачи для одномерного параболического уравнения (1.9)–(1.11). Мы не будем здесь касаться вопросов существования решения, ограничившись проблемой единственности и непрерывной зависимости решения от входных данных. Будем считать что задача (1.9)–(1.11) имеет классическое решение  $u(x, t)$  (например, дважды непрерывно дифференцируемое по  $x$  и непрерывно дифференцируемое по  $t$ ).

Запишем (1.9)–(1.11) как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Для функций, заданных в области  $\Omega = (0, 1)$  и обращающихся в нуль в граничных точках (на  $\partial\Omega$ ), введем гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ , в котором скалярное произведение определено следующим образом

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx.$$

Для нормы в  $\mathcal{H}$  используется обозначение

$$\|v\| = (v, v)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Для функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.10), определим оператор

$$\mathcal{A}u = [\mathcal{A}u](x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l. \quad (1.18)$$

С учетом введенных обозначений уравнение (1.9), дополненное условиями (1.10) на границе, запишем как дифференциально-операторное уравнение для нахождения  $u(t) \in \mathcal{H}$ :

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1.19)$$

Начальное условие (1.11) переписывается в виде

$$u(0) = u_0. \quad (1.20)$$

Отметим основные свойства оператора  $\mathcal{A}$ , определяемого согласно (1.18). Оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряженным и неотрицательным в  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \geq 0. \quad (1.21)$$

Свойство самосопряженности следует из равенства

$$(\mathcal{A}v, w) = \int_0^l \mathcal{A}v(x)w(x) dx = \int_0^l k(x) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = (v, \mathcal{A}^*w),$$

которое получено с учетом того, что функции  $v(x), w(x)$  обращаются в нуль при  $x \in \partial\Omega$ . Для функций  $u(x) = 0$ ,  $x \in \partial\Omega$  имеем

$$(\mathcal{A}v, v) = \int_0^l k(x) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \geq 0$$

и поэтому  $\mathcal{A} \geq 0$ .

Получим простейшую априорную оценку для решения задачи (1.19), (1.20). При рассмотрении задач для эволюционных уравнений большое значение имеет **лемма Гронуолла**. Ограничимся ее формулировкой в простейшем варианте.

**Лемма 1.1.** Для функции  $g(t)$ , удовлетворяющей неравенству

$$\frac{dg}{dt} \leq ag(t) + b(t), \quad t > 0,$$

с  $a = \text{const}$ ,  $b(t) \geq 0$ , верна оценка

$$g(t) \leq \exp \{at\} \left( g(0) + \int_0^t \exp \{-a\theta\} b(\theta) d\theta \right), \quad t > 0.$$

**Теорема 1.1.** Для решения задачи (1.19), (1.20) верна априорная оценка

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\theta)\| d\theta, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.22)$$

*Доказательство.* Домножая уравнение (1.19) скалярно на  $u(t)$ , получим равенство

$$\left( \frac{du}{dt}, u \right) + (Au, u) = (f, u).$$

С учетом неравенства Коши—Буняковского (неравенства Шварца) имеем

$$\left( \frac{du}{dt}, u \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = \|u\| \frac{d}{dt} \|u\|, \quad (f, u) \leq \|f\| \cdot \|u\|,$$

что с учетом неотрицательности оператора  $A$  приводит к неравенству

$$\frac{d}{dt} \|u\| \leq \|f\|.$$

Из этого неравенства вытекает доказываемая оценка (1.22) (в лемме Гронуолла  $a = 0$ ). ■

Корректность задачи связывается с существованием единственного решения и его устойчивостью по отношению к малым возмущениям входных данных.

**Следствие 1.** Решение задачи (1.19), (1.20) единственно.

Пусть имеются два решения  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Разность  $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$  удовлетворяет уравнению (1.19) с  $f(t) = 0$ ,  $0 < t \leq T$ , и однородному начальному условию ( $u_0 = 0$ ). Из априорной оценки (1.22) следует  $u(t) = 0$  для всех  $0 \leq t \leq T$ .

В рассматриваемой задаче в качестве входных данных необходимо рассматривать, прежде всего, начальные условия. В этом случае мы говорим об **устойчивости по начальным данным**. Входными данными являются коэффициенты уравнения (**коэффициентная устойчивость**). В частности, имеет смысл исследовать зависимость решения задачи от правой части уравнения — **устойчивость по правой части**. Покажем, например, что полученная априорная оценка (1.22) обеспечивает устойчивость по начальным данным и правой части.

Будем помимо (1.19), (1.20) рассматривать задачу с возмущенными начальным условием и правой частью:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \mathcal{A}\tilde{u} = \tilde{f}(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1.23)$$

Начальное условие (1.11) переписывается в виде

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0. \quad (1.24)$$

**Следствие 2.** Пусть

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\| \leq \varepsilon, \quad \|f(t) - \tilde{f}(t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 < t \leq T,$$

где  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq M\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T$$

с постоянной  $M = 1 + T$ .

Это определяет непрерывную зависимость решения задачи (1.19), (1.20) от правой части и начальных условий. Для  $\delta u(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$  из (1.19), (1.20) и (1.23), (1.24) получим задачу

$$\frac{d\delta u}{dt} + \mathcal{A}\delta u = \delta f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.25)$$

$$\delta u(0) = \delta u_0, \quad (1.26)$$

где

$$\delta u_0 = u_0 - \tilde{u}_0, \quad \delta f(t) = f(t) - \tilde{f}(t).$$

Для решения задачи (1.25), (1.26) верна априорная оценка (см. (1.22))

$$\|\delta u(t)\| \leq \|\delta u_0\| + \int_0^t \|\delta f(\theta)\| d\theta, \quad 0 \leq t \leq T$$

и тем самым

$$\|\delta u(t)\| \leq (1 + T)\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Немного сложнее устанавливаются оценки коэффициентной устойчивости решения задачи (1.18)–(1.20) (по коэффициенту  $k(x)$ ).

### 1.2.3. Краевая задача для эллиптического уравнения

При рассмотрении эллиптических краевых задач основное внимание уделяется априорным оценкам устойчивости по граничным условиям и правой части. В качестве примера стационарной задачи математической физики рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона (1.2), (1.3).

Подобно рассмотренному выше случаю параболической задачи можно ориентироваться на получение априорных оценок решений краевых



задач для эллиптического уравнения второго порядка в гильбертовых пространствах. Здесь мы укажем на возможность получения априорных оценок в других нормах. Наше рассмотрение базируется на использовании хорошо известного **принципа максимума**.

**Теорема 1.2** (Принцип максимума). Пусть в задаче (1.2), (1.3)  $f(\mathbf{x}) \leq 0$  ( $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ) в ограниченной области  $\Omega$ . Тогда решение  $u(\mathbf{x})$  достигает максимума (минимума) на границе области, т. е.

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \mu(\mathbf{x}) \quad \left( \min_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \mu(\mathbf{x}) \right). \quad (1.27)$$

Простым следствием принципа максимума является утверждение о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

**Следствие 1.** Решение задачи (1.2), (1.3) единственно.

На основе теоремы 1.2 можно получить и априорные оценки, выражающие устойчивость решения задачи (1.2), (1.3) по правой части и граничным условиям в равномерной норме. Используем обозначения

$$\|u(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x})|.$$

**Теорема 1.3.** Для решения задачи (1.2), (1.3) имеет место априорная оценка

$$\|u(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} \leq \|\mu(\mathbf{x})\|_{C(\partial\Omega)} + M \|f(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)}, \quad (1.28)$$

где постоянная  $M$  зависит от диаметра области  $\Omega$ .

*Доказательство.* Выберем функцию  $v(\mathbf{x})$ , которая удовлетворяет условиям

$$-\Delta v \geq 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.29)$$

$$v(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.30)$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} w_+(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) \|f(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} + \|\mu(\mathbf{x})\|_{C(\partial\Omega)} + u(\mathbf{x}), \\ w_-(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) \|f(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} + \|\mu(\mathbf{x})\|_{C(\partial\Omega)} - u(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Принимая во внимание (1.27) и (1.30), получим  $w_{\pm}(\mathbf{x}) \geq 0$  на границе области  $\Omega$ . Внутри области из (1.2) и (1.29) следует

$$-\Delta w_{\pm} = -\|f(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} \Delta v \pm f(\mathbf{x}).$$

С учетом (1.29) имеем  $-\Delta w_{\pm}(\mathbf{x}) \geq 0$ . На основании принципа максимума получим  $w_{\pm}(\mathbf{x}) \geq 0$  во всей области  $\Omega$ .

Так как функции  $w_{\pm}(\mathbf{x})$  неотрицательны, из (1.31) непосредственно вытекает

$$\|u(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} \leq \|\mu(\mathbf{x})\|_{C(\partial\Omega)} + \|v(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)} \|f(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)}.$$

Тем самым мы установили априорную оценку (1.28) с постоянной  $\mathcal{M} = \|v(\mathbf{x})\|_{C(\Omega)}$ .

Конкретизируем величину константы, ее зависимость от расчетной области. Будем считать, что ограниченная область  $\Omega$  целиком лежит в круге радиуса  $R$  с центром  $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ .

Положим

$$v(\mathbf{x}) = c \left( R^2 - (x_1 - x_1^{(0)})^2 - (x_2 - x_2^{(0)})^2 \right)$$

с пока неопределенной положительной константой  $c$ . Очевидно, что  $v(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  и

$$-\Delta v = 4c.$$

Поэтому при выборе  $c = 1/4$  условия (1.29), (1.30) будут выполнены. В силу этого постоянная  $\mathcal{M}$  в (1.28) определяется выражением

$$\mathcal{M} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{4} \left( R^2 - (x_1 - x_1^{(0)})^2 - (x_2 - x_2^{(0)})^2 \right) = \frac{R^2}{4}.$$

Эта постоянная зависит только от диаметра области  $\Omega$ . ■

Априорная оценка (1.28) обеспечивает устойчивость решения задачи (1.2), (1.3) по правой части и граничным условиям. Аналогично рассматривается и случай более общих краевых задач для эллиптических уравнений второго уравнения (1.1) с граничными условиями третьего рода (1.4).

## 1.3. Некорректные задачи

Обратные задачи математической физики часто относятся к классу некорректных в классическом смысле. В качестве примера некорректной задачи рассматривается задача с обратным временем для параболического уравнения второго порядка, для которой нет непрерывной зависимости решения от начальных данных. При сужении класса решений имеет место устойчивость, т. е. эта задача принадлежит к классу условно корректных (корректных по Тихонову) задач.

### 1.3.1. Пример некорректной задачи

Задачи, в которых какое-либо из трех условий корректной постановки задачи (существование, единственность, устойчивость) не выполнено, относятся к классу **некорректных задач**. При этом определяющую роль играет условие непрерывной зависимости решения от входных данных. Приведем некоторые примеры некорректно поставленных задач для уравнений математической физики.

Для эллиптических уравнений корректно поставленными являются задачи с заданными граничными условиями (см., например, (1.1), (1.4)). Можно рассмотреть задачу Коши для эллиптических уравнений, когда условия ставятся не на всей границе  $\partial\Omega$ , а только на некоторой ее части  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Решение  $u(x)$  определяется из уравнения (1.1) и двух условий на  $\Gamma$ :

$$u(x) = \mu(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nu(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1.32)$$

Некорректность задачи Коши (1.1), (1.32) обусловлена неустойчивостью решения относительно этих условий.

Для параболических уравнений корректными являются задачи с заданными граничными и начальными условиями (см. (1.9)–(1.11)). При задании решения на конечный момент времени мы имеем задачу с обратным временем — по заданному состоянию мы хотим восстановить предысторию исследуемого процесса. Остановимся на простейшей задаче с обратным временем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t < T, \quad (1.33)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (1.34)$$

$$u(x, T) = u_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.35)$$

Для объяснения сущности некорректности этой задачи можно рассмотреть решение задачи (1.33)–(1.35) с условием

$$u_T(x) = \frac{1}{k^p} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right), \quad (1.36)$$

где  $k$  и  $p$  — целые положительные числа. В норме гильбертова пространства  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ ,  $\Omega = (0, l)$ , имеем

$$\|u_T(x)\|^2 = \int_{\Omega} u_T^2(x) dx = \frac{1}{k^{2p}} \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , т. е. «начальное» условие сколь угодно малое.

Точное решение задачи (1.33)–(1.36) имеет вид

$$u(x, t) = u_T(x) \exp\left\{\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 (T - t)\right\}.$$

Из этого представления следует, что при  $0 \leq t < T$

$$\|u(x, t)\| = \frac{1}{k^p} \exp\left\{\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 (T - t)\right\} \rightarrow \infty$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, возмущения в «начальном» условии, сколь малыми они не были, неограниченно возрастают при  $t < T$ .

### 1.3.2. Понятие условно корректной задачи

Необходимость решения неустойчивых задач, подобных приведенной выше, требует более точного определения решения задачи. В **условно корректных задачах**, задачах, корректных по А. Н. Тихонову, речь идет уже не просто о решении, а о решении, принадлежащем некоторому классу. Сужение класса допустимых решений позволяет в некоторых случаях перейти к корректной задаче.

Будем говорить, что задача поставлена корректно по Тихонову, если:

- 1) априори известно, что решение задачи существует в некотором классе,
- 2) в этом классе решение единственно,
- 3) решение задачи зависит непрерывно от входных данных.

Принципиальное отличие состоит именно в выделении класса допустимых решений. Класс априорных ограничений на решение может быть разным. Сама постановка задачи при рассмотрении некорректных задач существенно меняется — в постановку задачи включается условие о принадлежности решения некоторому множеству.

### 1.3.3. Условная корректность задачи с обратным временем

Ранее мы установили непрерывную зависимость решения эволюционной задачи (1.18)–(1.20). Будем теперь рассматривать некорректную задачу Коши (задано начальное условие (1.20)) для уравнения

$$\frac{du}{dt} - Au = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.37)$$

в котором оператор  $A$  определяется согласно (1.18).

Получим оценку решения задачи (1.18), (1.20), (1.37) при  $f(t) = 0$ , из которой вытекает условная корректность задачи. В своем исследовании мы опираемся на самосопряженность оператора  $A$  и на то, что он не зависит от времени (оператор  $A$  — стационарный). Обозначим

$$\Phi(t) = \|u\|^2 = (u, u). \quad (1.38)$$

Непосредственное дифференцирование выражения (1.38) с учетом уравнения (1.37) при  $f(t) = 0$  дает

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2 \left( u, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 2(u, Au). \quad (1.39)$$

Принимая во внимание самосопряженность оператора  $A$ , при повторном дифференцировании получим

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 4 \left( Au, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 4 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2. \quad (1.40)$$

Из (1.38)–(1.40) и неравенства Коши—Буняковского следует

$$\Phi \frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 = 4 \left( \|u\|^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 - \left( u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \geq 0. \quad (1.41)$$

Неравенство (1.41) эквивалентно неравенству

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln \Phi(t) \geq 0, \quad (1.42)$$

т. е. функция  $\ln \Phi(t)$  выпукла. Из (1.42) имеем

$$\ln \Phi(t) \leq \frac{t}{T} \ln \Phi(T) + \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \ln \Phi(0).$$

Отсюда следует

$$\Phi(t) \leq (\Phi(T))^{t/T} (\Phi(0))^{1-t/T}.$$

С учетом (1.38) получим искомую оценку решения задачи (1.20), (1.37):

$$\|u(t)\| \leq \|u(T)\|^{t/T} \cdot \|u(0)\|^{1-t/T}, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.43)$$

Пусть теперь рассматривается решение задачи (1.20), (1.37) в классе ограниченных в  $H$  решений, т. е.

$$\|u(t)\| \leq \mathcal{M}, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.44)$$

В классе априорных ограничений (1.44) из (1.43) получим оценку

$$\|u(t)\| \leq \mathcal{M}^{t/T} \|u(0)\|^{1-t/T}, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.45)$$

Это значит, что для задачи (1.20), (1.37) имеет место непрерывная зависимость решения от начальных данных при  $0 < t < T$  в классе ограниченных решений. На основании этого имеет смысл строить алгоритмы приближенного решения некорректной задачи (1.20), (1.37), которые каким-либо образом выделяли бы класс ограниченных решений. Кроме того, для приближенного решения должна быть характерной оценка типа (1.45), которая допускает рост нормы решения во времени.

## 1.4. Классификация обратных задач математической физики

Краевая задача для уравнения с частными производными характеризуется заданием определяющего уравнения, расчетной области, граничных и начальных условий. Поэтому среди обратных задач можно выделить коэффициентные, геометрические, граничные и эволюционные обратные задачи.

### 1.4.1. Прямые и обратные задачи

При обработке данных натуральных экспериментов по дополнительным косвенным измерениям делается вывод о внутренних связях явления или процесса. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, можно ставить проблему идентификации математической модели, например, определение коэффициентов дифференциального уравнения. Такие задачи мы относим к классу обратных задач математической физики.

Задачи математической физики можно классифицировать по различным признакам. Например, можно выделить стационарные задачи, которые описывают установившиеся, неизменные во времени процессы и явления. Нестационарные задачи описывают динамические процессы, в которых решение меняется во времени. Не столь очевидно разделение задач математической физики на прямые и обратные.

С общей методологической точки зрения **прямыми задачами** мы можем назвать задачи, для которых заданы причины, а искомыми величинами являются следствия. При таких предпосылках **обратными** будут задачи, в которых известны следствия, а неизвестными выступают причины. Однако такое общее разделение не всегда легко провести на практике.

Для уравнений с частными производными в стандартных курсах математической физики формулируются корректные краевые задачи, которые мы и относим к классу прямых задач. Для эллиптических уравнений второго порядка дополнительные условия на решение (первого, второго или третьего рода) задаются на границе области. С точки зрения причинно-следственных отношений граничные условия являются причинами, а следствием — решение краевой задачи. Для параболических уравнений задается начальное условие, а для гиперболических уравнений второго порядка начальное состояние определяется заданием решения и производной по времени.

Для того чтобы не загромождать свое рассмотрение терминологическими тонкостями, к прямым задачам мы отнесем именно эти классические задачи математической физики. Они характеризуются необходимостью нахождения решения из уравнения с заданными коэффициентами и правой частью и дополнительных граничных и начальных условий.

Под обратными задачами математической физики мы будем понимать задачи, которые мы не можем отнести к прямым. Они связаны часто с необходимостью определения не только решения, но и некоторых недостающих коэффициентов и (или) условий. Одним из признаков обратной задачи может служить именно необходимость определения не только решения, но и некоторых компонент математической модели.

С рассматриваемой точки зрения обратные задачи характеризуются, прежде всего, тем, чего недостает, чтобы можно было бы отнести

поставленную задачу к классу прямых задач математической физики. С другой стороны, мы должны компенсировать недостающую информацию. Поэтому в обратных задачах необходимо выделить дополнительную информацию, которая позволяет рассчитывать на возможность однозначного определения решения.

По этим отмеченным признакам можно классифицировать обратные задачи математической физики. Естественно ориентироваться, прежде всего, на те основные характеристики, которые выделяют обратную задачу. Для прямых задач математической физики решение определяется уравнением (коэффициентами и правой частью), граничными и, в нестационарных задачах, начальными условиями. Классификацию обратных задач удобно провести по признакам, что какие-то из отмеченных условий не заданы.

### 1.4.2. Коэффициентные обратные задачи

Мы выделим **коэффициентные обратные задачи**, которые характеризуется тем, что коэффициенты уравнения или (и) правая часть неизвестны. В качестве характерного примера будем рассматривать параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.46)$$

Простейшая прямая задача состоит в нахождении функции  $u(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению (1.46) и условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.47)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.48)$$

В прикладных проблемах часто свойства среды неизвестны и их нужно определять. В нашем случае можно поставить задачу идентификации коэффициента  $k(x)$ . В простейшем случае однородной среды неизвестным является коэффициент  $k(x) = \text{const}$ , для кусочно-однородной среды — несколько констант. При зависимости свойств среды интерес может представлять коэффициентная обратная задача по восстановлению  $k = k(u)$ .

Список возможных постановок коэффициентных обратных задач не исчерпывается выше отмеченными и легко может быть продолжен. Характерной является задача для уравнения (1.46) по нахождению пары неизвестных функций  $\{u(x, t), k(x)\}$ . Основная особенность рассматриваемой обратной задачи состоит в нелинейности коэффициентной обратной задачи.

Можно выделить как самостоятельную задачу определения неизвестной правой части  $f(x, t)$  параболического уравнения (1.46). Более

частные постановки связаны, например, с выбором зависимости

$$f(x, t) = \eta(t)\psi(x). \quad (1.49)$$

Интерес может представлять неизвестная зависимость источника (правой части) от времени при известном распределении по пространству — в представлении (1.49) функция  $\eta(t)$  неизвестна, а функция  $\psi(x)$  задана.

Если коэффициенты и (или) правая часть уравнения (1.46) неизвестны, то помимо условий (1.47), (1.48) необходимо использовать некоторые дополнительные условия. Этих условий не должно быть мало, чтобы иметь возможность для однозначного определения решения обратной задачи. Если ищется коэффициент в классе одномерных функций (функций одной переменной), то и дополнительные данные должны задаваться в этом же классе.

Пусть, например, рассматривается обратная задача (1.46)–(1.49) по нахождению пары функций  $\{u(x, t), \eta(t)\}$ . Помимо решения краевой задачи (1.46)–(1.48) нужно найти зависимость от времени правой части. В этом случае дополнительная информация может иметь вид

$$u(x^*, t) = \varphi(t), \quad 0 < x^* < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.50)$$

т. е. известно решение на каждый момент времени не только на границе, но и в некоторой внутренней точке  $x^*$  расчетной области  $\Omega$ .

При рассмотрении обратных задач типа (1.46)–(1.50) особое внимание должно уделяться проблемам единственности решения обратной задачи. Особенно это важно при рассмотрении нелинейных задач (пример — задача нахождения пары функций  $\{u(x, t), k(x)\}$ ).

### 1.4.3. Граничные обратные задачи

В условиях, когда прямые измерения на границе невозможны, мы имеем дело с **граничными обратными задачами**. В этом случае недостающие граничные условия идентифицируются, например, по измерениям внутри области. Приведем пример подобной обратной задачи для параболического уравнения (1.46).

Будем считать, что измерения недоступны на правом конце отрезка  $[0, l]$ , но зато известно решение во внутренней точке  $x^*$ , т. е. вместо (1.47) заданы условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(x^*, t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1.51)$$

Типичная постановка граничной обратной задачи состоит в идентификации потока на части границы, недоступной измерению (в рассматриваемом примере — при  $x = l$ ). Это соответствует нахождению из условий

$$(1.46), (1.48), (1.51) \text{ функций } \left\{ u(x, t), k(l) \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) \right\}.$$



### 1.4.4. Эволюционные обратные задачи

Прямая задача для нестационарных задач математической физики характеризуется заданием начальных условий (см., например, (1.48)). К **эволюционным обратным задачам** мы будем относить обратные задачи, в которых идентифицируются начальные условия (их недостает для формулировки задачи как прямой).

Применительно к рассматриваемой прямой задаче (1.46)–(1.48) простейшая эволюционная обратная задача формулируется следующим образом. Нам не заданы начальные условия (1.48), но известно решение на конечный момент времени  $t = T$ :

$$u(x, T) = u_T(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.52)$$

Необходимо найти решение уравнения (1.46) в предшествующие моменты времени (**ретроспективная обратная задача**).

Можно ставить обратную задачу по идентификации начального состояния при использовании дополнительной информации о решении во внутренних точках (дополнительное условие типа (1.50)).

## 1.5. Задачи и упражнения

1.1. На множестве функций  $v(0) = 0$ ,  $v(l) = 0$  определим оператор

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l.$$

Установите положительную определенность оператор  $\mathcal{A}$ , т. е. выполнение оценки  $(\mathcal{A}v, v) \geq \delta(v, v)$ , где  $\delta > 0$ .

1.2. Докажите (**неравенство Фридрихса**), что

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq M_0 \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 dx,$$

если  $u(x) = 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ .

1.3. Докажите лемму Гронуолла (лемму 1.1).

1.4. Покажите, что для решения задачи (1.18)–(1.20) справедлива априорная оценка

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp \{t\} \left( \|u_0\|^2 + \int_0^t \exp \{-\theta\} \|f(\theta)\|^2 d\theta \right).$$

**1.5.** Пусть  $\mathcal{A} \geq \delta E$ ,  $\delta = \text{const} > 0$ . Тогда для решения задачи (1.19), (1.20) имеет место

$$\|u(t)\| \leq \exp\{-\delta t\} \left( \|u_0\| + \int_0^t \exp\{\delta\theta\} \|f(\theta)\| d\theta \right).$$

**1.6.** Рассмотрите задачу Коши для эволюционного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1,$$

при  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* > 0$ . Получите оценку устойчивости по начальным данным и правой части

$$\|u(t)\|_*^2 \leq \exp\{t\} \left( \|u_1\|_{\mathcal{A}}^2 + \|v_0\|^2 + \int_0^t \exp\{-\theta\} \|f(\theta)\|^2 d\theta \right),$$

где

$$\|u\|_*^2 = \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \|u\|_{\mathcal{A}}^2$$

и  $\|v\|_{\mathcal{D}}^2 = (\mathcal{D}v, v)$  для самосопряженного и положительного оператора  $\mathcal{D}$ .

**1.7.** Докажите принцип максимума (теорему 1.2).

**1.8.** Докажите (принцип максимума для параболического уравнения), что решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_1(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

принимает максимальное и минимальное значения в граничных точках или на начальный момент времени, т. е.

$$\begin{aligned} \min \{0 < x < l, 0 < t \leq T\} \{ \mu_0(t), \mu_1(t), u_0(x) \} &\leq u(x, t) \leq \\ &\leq \max_{0 < x < l, 0 < t \leq T} \{ \mu_0(t), \mu_1(t), u_0(x) \}. \end{aligned}$$

**1.9.** Рассмотрите краевую задачу

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(x)u &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где

$$k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0, \quad q(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Привлекая неравенство Фридрихса (задача 1.2), получите оценку устойчивости решения по правой части

$$\|u\| \leq \mathcal{M}_1 \|f\|, \quad \|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**1.10.** На примере задачи

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} &= 0, \\ u(0, x_2) &= 0, \quad u(l, x_2) = 0, \\ u(x_1, 0) &= u_0(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = u_1(x_1) \end{aligned}$$

покажите некорректность задачи Коши для эллиптических уравнений (пример Ж. Адамара).

**1.11.** Исследуйте корректность граничной обратной задачи для параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu_1(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

**1.12.** Покажите, что для любого решения уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \mathcal{A}u = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с самосопряженным оператором  $\mathcal{A}$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \exp\{2t(T-t)\} (\|u(T)\|^2 + \chi)^{t/T} (\|u(0)\|^2 + \chi)^{1-t/T} - \chi, \\ \chi &= \frac{1}{2} \left( (\mathcal{A}u(0), u(0)) - \left( \frac{\partial u}{\partial t}(0), \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right) \right), \end{aligned}$$

из которой следует условная корректность задачи Коши для этого уравнения в классе ограниченных решений.

## Глава 2

---

# Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Обсуждение проблем численного решения задач математической физики мы начинаем с рассмотрения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. При аппроксимации дифференциальной задачи используются различные подходы, основное внимание уделяется конечно разностным аппроксимациям. На основе оценок устойчивости сеточного решения по правой части и граничным условиям устанавливается сходимость приближенного решения к точному. При решении сеточных задач, возникающих при дискретизации одномерных задач, используются прямые методы линейной алгебры. Приведена программа на языке FORTRAN 77 для решения краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и представлены результаты расчетов по решению модельных задач.

### 2.1. Сеточная задача

Возможные подходы к аппроксимации краевых задач математической физики иллюстрируются на примере краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

#### 2.1.1. Модельная дифференциальная задача

В качестве базового рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.1)$$

с переменными коэффициентами

$$k(x) \geq \kappa > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Эллиптические уравнения второго порядка, прототипом которых является уравнение (2.1), используются при моделировании многих физико-механических процессов.

Для однозначного определения неизвестной функции  $u(x)$  уравнение (2.1) дополняется двумя граничными условиями на концах отрезка  $[0, l]$ . Задаваться может функция  $u(x)$  (граничное условие первого рода), поток  $w(x) = -k(x)\frac{du}{dx}(x)$  (граничное условие второго рода) или же их линейная комбинация (граничное условие третьего рода):

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2; \quad (2.2)$$

$$-k(0)\frac{du}{dx}(0) = \mu_1, \quad k(l)\frac{du}{dx}(l) = \mu_2; \quad (2.3)$$

$$-k(0)\frac{du}{dx}(0) + \sigma_1 u(0) = \mu_1, \quad k(l)\frac{du}{dx}(l) + \sigma_2 u(l) = \mu_2. \quad (2.4)$$

В задачах с разрывными коэффициентами (контакт двух сред) формулируются дополнительные условия. Простейшее из них (условие идеального контакта) для уравнения (2.1) связывается с непрерывностью решения и потока в точке контакта  $x = x^*$ :

$$[u(x)] = 0, \quad \left[ k(x)\frac{du}{dx} \right] = 0, \quad x = x^*,$$

где использованы обозначения

$$[g(x)] = g(x+0) - g(x-0).$$

Отдельного рассмотрения заслуживают задачи с несамосопряженным оператором, когда, например,

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + v(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l. \quad (2.5)$$

Уравнение конвекции-диффузии-реакции (2.5) является модельным при исследовании процессов в механике сплошной среды.

При описании деформаций пластин и оболочек, задач гидродинамики математические модели включают эллиптические уравнения четвертого порядка. Их рассмотрение необходимо начать с краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Простейшей такой задачей является задача для уравнения

$$\frac{d^4 u}{dx^4}(x) = f(x), \quad 0 < x < l. \quad (2.6)$$

В этом случае задаются по два граничных условия на концах отрезка. Например, уравнение (2.6) дополняется условиями первого рода:

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2, \quad (2.7)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = \nu_1, \quad \frac{du}{dx}(l) = \nu_2. \quad (2.8)$$

При формулировке других типов краевых задач для уравнения (2.6) в граничных точках могут участвовать вторая и третья производные.

### 2.1.2. Разностная схема

Обозначим через  $\bar{\omega}$  равномерную сетку, для простоты, с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$ :

$$\bar{\omega} = \{x_i \mid x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

причем  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Разложение по формуле Тейлора в окрестности произвольного внутреннего узла  $x = x_i$  дает:

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm h \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) \pm \frac{h^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + O(h^4)$$

для достаточно гладкой функции  $u(x)$ . Здесь использованы обозначения  $u_i = u(x_i)$ . Поэтому для левой разностной производной (опуская индекс  $i$ ) имеем

$$u_{\bar{x}} \equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) - \frac{h}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O(h^2). \quad (2.9)$$

Тем самым левая разностная производная  $u_{\bar{x}}$  аппроксимирует первую производную  $du/dx$  с первым порядком (погрешность аппроксимации  $O(h)$  в каждом внутреннем узле) при  $u(x) \in C^2(\Omega)$ .

Аналогично для правой разностной производной получим

$$u_x \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O(h^2). \quad (2.10)$$

При использовании трехточечного шаблона (узлы  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ ) можно использовать центральную разностную производную:

$$u_x \equiv \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{3} \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + O(h^3), \quad (2.11)$$

которая аппроксимирует производную  $du/dx$  со вторым порядком при  $u(x) \in C^3(\Omega)$ .

Для второй производной  $d^2u/dx^2$  подобные выкладки дают:

$$u_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Этот разностный оператор аппроксимирует в узле  $x = x_i$  вторую производную со вторым порядком при  $u(x) \in C^4(\Omega)$ .

Построение разностных схем для задачи (2.1), (2.2) с достаточно гладкими коэффициентами можно осуществить на основе непосредственного перехода от дифференциальных операторов к разностным.

Остановимся подробнее на аппроксимации одномерного оператора

$$\mathcal{A}u = -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u. \quad (2.12)$$

Рассмотрим разностное выражение

$$(au_{\bar{x}})_x = \frac{a_{i+1}}{h} u_x - \frac{a_i}{h} u_{\bar{x}}.$$

С учетом представлений (2.9), (2.10) для локальной погрешности аппроксимации первых производных направленными разностями получим

$$\begin{aligned} (au_{\bar{x}})_x &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h} \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + \\ &+ \frac{a_{i+1} - a_i}{6} h \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для нахождения коэффициентов  $a_i$  сравним (2.13) с дифференциальным выражением

$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = \frac{dk}{dx} \frac{du}{dx} + k(x) \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Естественно ориентироваться на выбор  $a_i$  таких, что

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{dk}{dx}(x_i) + O(h^2), \quad (2.14)$$

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2). \quad (2.15)$$

При таких условиях разностный оператор

$$\mathcal{A}y = -(ay_{\bar{x}})_x + cy, \quad x \in \omega, \quad (2.16)$$

где, например,  $c(x) = q(x)$ ,  $x \in \omega$ , будет аппроксимировать дифференциальный оператор (2.12) с точностью  $O(h^2)$ .

Условиям (2.15), (2.16) удовлетворяют, в частности, следующие формулы для определения  $a_i$ :

$$\begin{aligned} a_i &= k_{i-1/2} = k(x_i - 0,5h), \\ a_i &= \frac{k_{i-1} + k_i}{2}, \\ a_i &= 2 \left( \frac{1}{k_{i-1}} + \frac{1}{k_i} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Другие, отличные от (2.16), (2.17), возможности построения разностного оператора  $A$  отмечаются ниже.

Дифференциальной задаче (2.1), (2.2) поставим в соответствие разностную задачу

$$-(ay_x)_x + cy = \varphi, \quad x \in \omega, \quad (2.18)$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad (2.19)$$

где, например,  $c(x) = q(x)$ ,  $\varphi(x) = f(x)$ ,  $x \in \omega$ .

Краевые задачи математической физики удобно рассматривать при однородных граничных условиях. Это же в полной мере относится и к сеточным задачам. Сам переход от неоднородных граничных условий к однородным в дифференциальных задачах не всегда очевиден. Для сеточных задач ситуация в некотором смысле проще — неоднородные граничные условия включаются в правую часть сеточного уравнения в приграничных узлах. В качестве примера рассмотрим сеточную задачу (2.18), (2.19).

Будем рассматривать множество сеточных функций, обращающихся в нуль в граничных узлах, т. е.  $y_0 = 0$ ,  $y_N = 0$ . В силу этого речь идет об аппроксимации  $u(x)$  сеточной функцией  $y(x)$  только во внутренних узлах расчетной сетки. Для  $x \in \omega$  вместо разностной задачи (2.18), (2.19) будем использовать операторное уравнение

$$Ay = \varphi, \quad x \in \omega. \quad (2.20)$$

В приграничных узлах используются аппроксимации типа

$$-\frac{1}{h} \left( a_2 \frac{y_2 - y_1}{h} - a_1 \frac{y_1 - \mu_1}{h} \right) + c_1 y_1 = f_1.$$

Поэтому

$$(Ay)_1 = \varphi_1,$$

где

$$\varphi_1 = f_1 + \frac{a_1 \mu_1}{h^2}.$$

Таким образом разностная задача (2.20) с оператором  $A$ , определяемым согласно (2.16) и действующим на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , ставится в соответствие дифференциальной задаче (2.1), (2.2). При этом правая часть в (2.20)

$$\varphi(x) = \begin{cases} f_1 + \frac{a_1 \mu_1}{h^2}, & x = x_1, \\ f(x), & x = x_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ f_{N-1} + \frac{a_{N-1} \mu_2}{h^2}, & x = x_{N-1} \end{cases}$$

имеет не совсем обычный вид только в приграничных узлах.



### 2.1.3. Схемы метода конечных элементов

Построение дискретных аналогов стационарных задач математической физики может осуществляться на основе **метода конечных элементов**. Для модельного одномерного уравнения (2.1) с однородными граничными условиями

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \quad (2.21)$$

построим схему конечных элементов на основе метода Галёркина. Используя простейшие кусочно-линейные элементы, представим приближенное решение в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i w_i(x), \quad (2.22)$$

где **пробные функции**  $w_i(x)$  имеют (см. рис. 2.1) вид

$$w_i(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x > x_{i+1}. \end{cases}$$

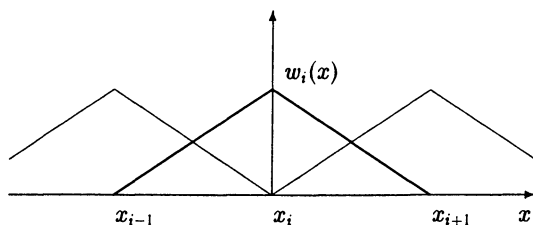


Рис. 2.1. Кусочно-линейные пробные функции

Коэффициенты разложения определяются из системы линейных уравнений, которую мы получаем после умножения исходного уравнения (2.1) на **поверочную функцию**  $w_i(x)$  и интегрирования по всей области. С учетом финитности пробных функций получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x) \frac{dy}{dx} \frac{dw_i}{dx} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x) y(x) w_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) w_i(x) dx.$$

Подстановка представления приближенного решения (2.22) приводит к трехточечному разностному уравнению (2.20). Для оператора  $A$  получим представление (2.16), в котором сеточная функция  $a_i$  зависит не только от коэффициента  $k(x)$ , но и от  $q(x)$ :

$$a_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})(x_i - x) dx. \quad (2.23)$$

Для гладких коэффициентов  $k(x)$  применение простейших квадратурных формул приводит к (2.17).

Для коэффициента  $c_i$  и правой части разностного уравнения (2.16) получим

$$c_i = \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1}) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x_{i+1} - x) dx \right), \quad (2.24)$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h^2} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1}) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x_{i+1} - x) dx \right). \quad (2.25)$$

Даже в простейшем случае постоянных коэффициентов  $k(x)$  и  $q(x)$  мы приходим к не совсем обычной аппроксимации младшего члена дифференциального оператора  $\mathcal{A}$ .

Аналогично строятся разностные схемы при выборе базисных функций в виде кусочных полиномов более высокой степени (квадратичных, кубических и т. д.). При рассмотрении задач конвекции-диффузии (см. уравнение (2.5)) получили распространение схемы метода конечных элементов, полученные на основе метода Петрова—Галёркина, в котором пробные и поверочные функции уже не совпадают друг с другом. На этом пути строятся, в частности, конечно-элементные аналоги обычных разностных схем с направленными разностями.

#### 2.1.4. Метод баланса

Дифференциальные уравнения обычно отражают тот или иной закон сохранения для некоторых элементарных объемов (интегральная форма законов сохранения) при стягивании этих объемов к нулю. Построение дискретной задачи означает по сути обратный переход от дифференциальной модели к интегральной. Естественно требовать при таком переходе, чтобы законы сохранения выполнялись. Разностные схемы, выражающие законы сохранения на сетке, называются **консервативными разностными схемами**.

Для построения консервативных разностных схем естественно исходить из законов сохранения (балансов) для отдельных ячеек разностной сетки. Такой метод построения консервативных разностных схем получил название **интегро-интерполяционный метод (метод баланса)**. Этот подход к построению дискретных задач известен также как **метод конечного объема**. Интегро-интерполяционный метод предложен А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским в начале 1950-х годов.

Рассмотрим применение интегро-интерполяционного метода на примере построения разностной схемы для модельной одномерной задачи (2.1), (2.2). Положим  $Q(x) = -k(x) \frac{du}{dx}$  и выделим контрольные объемы в виде отрезков  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ , где  $x_{i-1/2} = (i - 1/2)h$ . Интегрирование уравнения (2.1) по контрольному объему  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$  дает

$$Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx. \quad (2.26)$$

Балансное соотношение (2.26) отражает соответствующий закон сохранения для отрезка  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ . Величина  $Q_{i\pm 1/2}$  определяет поток через сечение  $x_{i\pm 1/2}$ . Дисбаланс этих потоков обусловлен распределенными источниками (правая часть (2.26)) и дополнительными источниками (интеграл в левой части уравнения).

Для получения разностного уравнения из балансного соотношения (2.26) необходимо использовать те или иные восполнения сеточных функций. Само решение будем искать в целых узлах ( $y(x)$ ,  $x = x_i$ ), а потоки — в полуцелых ( $Q(x)$ ,  $x = x_{i+1/2}$ ). Выразим потоки в полуцелых узлах через значения функции  $u(x)$  в узлах. Для этого проинтегрируем соотношение  $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{k(x)}Q(x)$  на отрезке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ :

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{Q(x)}{k(x)} dx \approx Q_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Обозначая

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad (2.27)$$

получим

$$Q_{i-1/2} \approx -a_i u_{\bar{x},i}, \quad Q_{i+1/2} \approx -a_{i+1} u_{x,i}.$$

Для правой части имеем

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx.$$

С учетом выбранных восполнений положим

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x) dx \approx c_i u_i,$$

где

$$c_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

В итоге мы приходим к разностной схеме (2.16) при расчете сеточной функции  $a_i$  по формулам (2.27) (ср. с (2.17)).

Рассматриваемые консервативные схемы принадлежат к классу однородных разностных схем (коэффициенты разностного уравнения рассчитываются по одним и тем же формулам для любого узла сетки). Полностью аналогично методом баланса строятся разностные схемы для более общих задач: задач с граничными условиями (2.3), или (2.4), задач на неравномерных сетках, многомерных задач и т. д. Поэтому интегро-интерполяционный метод рассматривается нами как основной метод построения дискретных аналогов задач математической физики.

## 2.2. Сходимость разностных схем

Основной вопрос при рассмотрении дискретных аналогов краевых задач состоит в исследовании близости приближенного решения к точному. Здесь на основе априорных оценок устойчивости решения разностной задачи получены оценки скорости сходимости приближенного решения в сеточных гильбертовых пространствах при численном решении модельной краевой задачи (2.1), (2.2).

### 2.2.1. Разностные тождества

Напомним некоторые основные понятия теории разностных схем. Будем считать, что на отрезке  $[0, l]$  введена равномерная сетка

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

где  $\omega$  — множество внутренних узлов:

$$\omega = \{x \mid x = x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N - 1, Nh = l\}.$$

Для некоторых других отдельных частей сетки  $\bar{\omega}$  используем обозначения:

$$\omega^+ = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad Nh = l\},$$

$$\omega^- = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad Nh = l\}.$$

На множествах узлов  $\omega$ ,  $\omega^\pm$  определим скалярные произведения

$$(y, w) \equiv \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h, \quad (y, w)^\pm \equiv \sum_{x \in \omega^\pm} y(x)w(x)h.$$

Приведем также сеточные аналоги формул дифференцирования произведения функций и интегрирования по частям. На основе введенных ранее определений операторов правой и левой разностных производных непосредственно проверяется справедливость равенств:

$$(yw)_{\bar{x},i} = y_{i-1}w_{\bar{x},i} + w_i y_{\bar{x},i} = y_i w_{\bar{x},i} + w_{i-1} y_{\bar{x},i}, \quad (2.28)$$

$$(yw)_{x,i} = y_{i+1}w_{x,i} + w_i y_{x,i} = y_i w_{x,i} + w_{i+1} y_{x,i}.$$

Эти равенства являются сеточным аналогом формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx}(yw) = y \frac{dw}{dx} + w \frac{dy}{dx}.$$

Аналогами формулы интегрирования по частям

$$\int_a^b \frac{dy}{dx} w \, dx = y(b)w(b) - y(a)w(a) - \int_a^b y \frac{dw}{dx} \, dx$$

являются сеточные тождества:

$$(y_x, w) = -(y, w_{\bar{x}})^+ + y_N w_N - y_1 w_0, \quad (2.29)$$

$$(y_{\bar{x}}, w) = -(y, w_x)^- + y_{N-1} w_N - y_0 w_0.$$

Заменяя в (2.29)  $y_i$  на  $a_i y_{\bar{x},i}$ , получим **первую разностную формулу Грина**:

$$((a y_{\bar{x}})_x, w) = -(a y_{\bar{x}}, w_{\bar{x}})^+ + a_N y_{\bar{x},N} w_N - a_1 y_{x,0} w_0. \quad (2.30)$$

**Вторая разностная формула Грина** имеет вид

$$\begin{aligned} & ((a y_{\bar{x}})_x, w) - (y, (a w_{\bar{x}})_x) = \\ & = a_N (y_{\bar{x},N} w_N - y_N w_{\bar{x},N}) - a_1 (y_{x,0} w_0 - y_0 w_{x,0}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Формулы (2.30), (2.31) принимают более простой вид

$$((a y_{\bar{x}})_x, w) = -(a y_{\bar{x}}, w_{\bar{x}})^+, \quad (2.32)$$

$$((a y_{\bar{x}})_x, w) = (y, (a w_{\bar{x}})_x) \quad (2.33)$$

для сеточных функций  $y(x)$ ,  $w(x)$ , обращающихся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$  (на  $\partial\omega$ ).

### 2.2.2. Свойства разностного оператора $A$

Для модельной задачи (2.1), (2.2) мы построили разностную схему (2.20), в которой разностный оператор  $A$  определяется на множестве сеточных функций  $y(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}$ , обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , выражением (см. (2.16))

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x + cy, \quad x \in \omega, \quad (2.34)$$

где, например,  $a(x) = k(x - 0,5h)$ ,  $c(x) = q(x)$ ,  $x \in \omega^+$ . В сеточном гильбертовом пространстве  $H$  норму введем соотношением  $\|y\| = (y, y)^{1/2}$ .

Разностный оператор  $A$  в  $H$ , как и в дифференциальном случае, является самосопряженным:

$$A = A^*. \quad (2.35)$$

Равенство  $(Ay, w) = (y, Aw)$  непосредственно следует из (2.33).

Для оператора  $A$  при обычных ограничениях  $k(x) \geq \kappa > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  верна оценка снизу

$$A \geq \kappa \lambda_0 E, \quad (2.36)$$

где  $\lambda_0$  — минимальное собственное значение разностного оператора второй производной. Для равномерной сетки имеем

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}.$$

Получим такую оценку снизу для оператора  $A$  на основе следующего разностного неравенства Фридрикса.

**Лемма 2.1.** Для любых сеточных функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , верно неравенство

$$\|y\|^2 \leq M_0 (\|y_{\bar{x}}\|^+)^2, \quad \|w\|^+ \equiv ((w, w)^+)^{1/2}, \quad M_0 = \frac{l^2}{8}. \quad (2.37)$$

*Доказательство.* Для такой сеточной функции  $y_i = y(x_i)$  имеем

$$y_i = \sum_{k=1}^i y_{\bar{x},i} h, \quad (2.38)$$

$$y_i = - \sum_{k=i+1}^N y_{\bar{x},i} h. \quad (2.39)$$

Для оценки правых частей (2.38), (2.39) воспользуемся неравенством

$$\left| \sum_k a_k b_k \right|^2 \leq \sum_k a_k^2 \sum_k b_k^2.$$

Полагая  $a_k = y_{\bar{x},i} h^{1/2}$ ,  $b_k = h^{1/2}$ , из (2.38), (2.39) получим

$$y_i^2 \leq x_i \sum_{k=1}^i (y_{\bar{x},k})^2 h, \quad (2.40)$$

$$y_i^2 \leq (l - x_i) \sum_{k=i+1}^N (y_{\bar{x},k})^2 h. \quad (2.41)$$

Пусть  $n = (N - 1)/2$ , если, например,  $N$  нечетное. Случай четного  $N$  рассматривается отдельно. Из (2.40), (2.41) имеем

$$y_i^2 \leq x_i \sum_{k=1}^n (y_{\bar{x},k})^2 h, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$y_i^2 \leq (l - x_i) \sum_{k=n+1}^N (y_{\bar{x},k})^2 h, \quad n + 1 < i \leq N.$$

Каждое из этих неравенств домножим на  $h$  и сложим их:

$$\sum_{i=1}^N y_i^2 h \leq \sum_{i=1}^n x_i h \sum_{k=1}^n (y_{\bar{x},k})^2 h + \sum_{i=n+1}^N (l - x_i) h \sum_{k=n+1}^N (y_{\bar{x},k})^2 h. \quad (2.42)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^n x_i h = \frac{x_n x_{n+1}}{2} < \frac{l^2}{8}, \quad \sum_{i=n+1}^N (l - x_i) h < \frac{l^2}{8},$$

от (2.42) приходим к оценке (2.37). ■

Предложенное доказательство без принципиальных изменений переносится на случай неравномерной сетки. Это же замечание относится и к многомерным задачам при использовании прямоугольных или общих нерегулярных сеток.

Для разностного оператора (2.34) с ограниченными коэффициентами  $k(x)$ ,  $q(x)$  как оператора в конечномерном пространстве  $H$  полезна также оценка сверху, которой нет, конечно, для дифференциального оператора  $\mathcal{A}$  (неограниченный оператор).

**Лемма 2.2.** *Имеет место оценка*

$$(Ay, y) \leq M_1(y, y) \quad (A \leq M_1 E) \quad (2.43)$$

с постоянной

$$M_1 = \frac{4}{h^2} \max_{1 \leq i \leq N-1} \frac{a_i + a_{i+1}}{2} + \max_{1 \leq i \leq N-1} c_i.$$

*Доказательство.* Действительно, имеем

$$(Ay, y) = (a(y_{\bar{x}})^2, 1) + (cy, y) = \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{h} (y_i - y_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N c_i y_i^2 h.$$

Воспользовавшись неравенством  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , положительностью сеточных функций  $a(x)$ ,  $c(x)$ ,  $x \in \omega$ , условиями  $y(x) = 0$ ,  $x \notin \omega$ , получим

$$(Ay, y) \leq \sum_{i=1}^N \frac{2}{h} (a_i + a_{i+1}) y_i^2 + \sum_{i=1}^N c_i y_i^2 h.$$

Отсюда следует доказываемая оценка (2.43). ■

### 2.2.3. Точность разностных схем

Для приближенного решения задачи (2.1), (2.2) используется разностная схема

$$Ay = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad (2.44)$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (2.45)$$

Для исследования точности разностной схемы (2.44) рассмотрим задачу для погрешности приближенного решения

$$z(x) = y(x) - u(x), \quad x \in \bar{\omega}.$$

Для погрешности из (2.44), (2.45) получим разностную задачу

$$Az = \psi(x), \quad x \in \omega, \quad (2.46)$$

которая с учетом точной аппроксимации краевых условий (2.2) рассматривается на множестве сеточных функций  $z(x)$ , обращающихся в нуль на границе. В (2.46)  $\psi(x)$  — погрешность аппроксимации:

$$\psi(x) = \varphi(x) - Au, \quad x \in \omega. \quad (2.47)$$

Рассматривая случай достаточно гладких коэффициентов и правой части уравнения (2.1), при использовании аппроксимаций (2.34) для погрешности аппроксимации получим

$$\psi(x) = O(h^2), \quad x \in \omega. \quad (2.48)$$

Сформулируем простейший результат о точности разностной схемы (2.44), (2.45) при решении модельной одномерной задачи (2.1), (2.2).

**Теорема 2.1.** Для погрешности разностного решения, определяемого из (2.44), (2.45), справедлива априорная оценка

$$\|z_{\bar{x}}\|^+ \leq \frac{M_0^{1/2}}{\kappa} \|\psi\|. \quad (2.49)$$



*Доказательство.* Домножим уравнение для погрешности (2.46) скалярно на  $z(x)$ ,  $x \in \omega$ , что дает

$$(Az, z) = (\psi, z). \quad (2.50)$$

Для левой части этого равенства имеем

$$(Az, z) \geq \kappa(\|z_{\bar{x}}\|^+)^2,$$

а правая часть оценивается снизу с учетом неравенства Фридрикса (2.37):

$$(\psi, z) \leq \|\psi\| \cdot \|z\| \leq M_0^{1/2} \|\psi\| \cdot \|z_{\bar{x}}\|^+.$$

Подстановка в (2.50) дает доказываемую оценку (2.49). ■

Из выражения (2.48) для локальной погрешности аппроксимации и априорной оценки (2.49) следует сходимость разностного решения к точному со вторым порядком.

## 2.3. Решение сеточной задачи

При дискретизации одномерных задач конвекции-диффузии мы приходим к трехточечным сеточным задачам. Для нахождения разностного решения используются традиционные прямые методы линейной алгебры. Излагается метод прогонки (алгоритм Томаса), который, как хорошо известно, является классическим методом Гаусса для матриц специальной ленточной структуры.

### 2.3.1. Метод прогонки

В качестве модельной рассматривается задача (2.1), (2.2). На равномерной сетке  $\bar{\omega}$  с шагом  $h$  этой дифференциальной задаче ставится в соответствие разностная задача (2.34), (2.44), (2.45). Разностную задачу запишем в виде

$$-\alpha_i y_{i-1} + \gamma_i y_i - \beta_i y_{i+1} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.51)$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2. \quad (2.52)$$

Для коэффициентов из (2.34), (2.44) получим следующие выражения:

$$\alpha_i = \frac{1}{h^2} k_{i-1/2}, \quad \beta_i = \frac{1}{h^2} k_{i+1/2}, \quad \gamma_i = \frac{1}{h^2} (k_{i-1/2} + k_{i+1/2}) + c_i, \\ i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Для нахождения решения задачи (2.51), (2.52) методом прогонки (алгоритм Томаса) используется представление

$$y_i = \xi_{i+1} y_{i+1} + \vartheta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.53)$$

с неопределенными коэффициентами  $\xi_i, \vartheta_i$ . Подстановка  $y_{i-1} = \xi_i y_i + \vartheta_i$  в (2.51) дает

$$(\gamma_i - \alpha_i \xi_i) y_i - \beta_i y_{i+1} = \varphi_i + \alpha_i \vartheta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Используя теперь представление (2.53), получим

$$\begin{aligned} ((\gamma_i - \alpha_i \xi_i) \xi_{i+1} - \beta_i) y_{i+1} &= \varphi_i + \alpha_i \vartheta_i + (\gamma_i - \alpha_i \xi_i) \vartheta_{i+1}, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Это равенство выполнено при произвольных  $y_{i+1}$ , если

$$\begin{aligned} (\gamma_i - \alpha_i \xi_i) \xi_{i+1} - \beta_i &= 0, \quad \varphi_i + \alpha_i \vartheta_i + (\gamma_i - \alpha_i \xi_i) \vartheta_{i+1} = 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для вычисления прогоночных коэффициентов  $\xi_i, \vartheta_i$ :

$$\xi_{i+1} = \frac{\beta_i}{\gamma_i - \alpha_i \xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.54)$$

$$\vartheta_{i+1} = \frac{\varphi_i + \alpha_i \vartheta_i}{\gamma_i - \alpha_i \xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.55)$$

Для того чтобы начать вычисления, запишем граничное условие (2.52) на левом конце в виде (2.53), т. е.  $y_0 = \xi_1 y_1 + \vartheta_1$ , так что

$$\xi_1 = 0, \quad \vartheta_1 = \mu_1. \quad (2.56)$$

После определения прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам (2.54)–(2.56) находится само решение в соответствии с (2.53) и с учетом второго краевого условия (2.52).

### 2.3.2. Корректность алгоритма прогонки

Сформулируем достаточные условия, при которых можно пользоваться приведенными выше расчетными формулами метода прогонки. Мы не будем рассматривать здесь весь комплекс проблем обоснования метода прогонки. В своем изложении мы ограничимся только проблемой корректности метода прогонки, что в нашем случае эквивалентно требованию о необращении в нуль знаменателя в выражениях (2.54), (2.55).

**Лемма 2.3.** Пусть для системы уравнений (2.51), (2.52) выполнены условия

$$|\alpha_i| > 0, \quad |\beta_i| > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.57)$$

$$|\gamma_i| \geq |\alpha_i| + |\beta_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.58)$$

Тогда алгоритм (2.53)–(2.56) корректен, т. е. в расчетных формулах (2.54), (2.55)  $\gamma_i - \alpha_i \xi_i \neq 0$ .

*Доказательство.* Мы покажем, что

$$|\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.59)$$

При таких ограничениях на прогоночный коэффициент в силу (2.57), (2.58) имеем

$$|\gamma_i - \alpha_i \xi_i| \geq ||\gamma_i| - |\alpha_i| \cdot |\xi_i|| \geq ||\gamma_i| - |\alpha_i|| \geq |\beta_i| > 0.$$

Доказательство (2.59) проведем по индукции. При  $i = 1$  условие (2.59) выполнено. Предположим, что неравенство (2.59) имеет место при  $i$ , для  $i + 1$  в силу (2.54) получим

$$|\xi_{i+1}| = \frac{|\beta_i|}{|\gamma_i - \alpha_i \xi_i|} \leq \frac{|\beta_i|}{|\beta_i|} \leq 1.$$

Когда (2.59) имеет место, тогда и  $\gamma_i - \alpha_i \xi_i \neq 0$ . ■

Для нашей модельной задачи (2.1), (2.2) при использовании разностной схемы (2.51), (2.52) условия корректности прогонки (2.57), (2.58) будут выполнены при

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad \gamma_i \geq \alpha_i + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

При выполнении этих условий для разностного решения задачи (2.51), (2.52) будет выполнен принцип максимума, т. е. разностная схема является монотонной. Более подробное обсуждение этого вопроса следует ниже.

### 2.3.3. Метод Гаусса

Существует большое множество вариантов метода прогонки, которые более точно учитывают ту или иную специфику решаемой проблемы. Например, можно более тесно привязаться к классическому прямому методу решения систем линейных алгебраических уравнений — **методу Гаусса** ( $LU$ -разложение, компактная схема метода Гаусса).

В матричном виде разностная задача (2.51), (2.52) имеет вид

$$Ay = \varphi, \quad x \in \omega \quad (2.60)$$

с соответствующим определением правой части (см. (2.20)). На основании установленных свойств оператора  $A$  матрица  $A$  положительно определена. В этом случае ее главные (угловые) миноры положительны и поэтому имеет место  $LU$ -разложение  $A = LU$ .

В записи (2.60) для матрицы  $A$  имеем представление

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & \gamma_2 & -\beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & \gamma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Для элементов  $LU$ -разложения с учетом ленточной структуры исходной матрицы  $A$  нам удобно положить

$$L = \begin{bmatrix} \xi_2^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_2 & \xi_3^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & \xi_4^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi_N^{-1} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_2\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\xi_3\beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы  $L$  определяются по рекуррентным соотношениям:

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{\gamma_i - \beta_{i-1}\alpha_i\xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \xi_1 = 0. \quad (2.61)$$

Решение задачи  $L\vartheta = \varphi$  дается формулой

$$\vartheta_{i+1} = \frac{\varphi_i + \alpha_i\vartheta_i}{\gamma_i - \beta_{i-1}\alpha_i\xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \vartheta_1 = 0. \quad (2.62)$$

После этого из  $Uy = \vartheta$  находится решение задачи (2.60):

$$y_i = \xi_{i+1}\beta_i y_{i+1} + \vartheta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad y_N = 0. \quad (2.63)$$

Расчетные формулы (2.61)–(2.63)  $LU$ -разложения вытекают из описанного выше алгоритма прогонки (2.53)–(2.56) при замене

$$\xi_i \mapsto \beta_{i-1}\xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Или же наоборот (что будет более правильно), расчетные формулы метода прогонки (2.53)–(2.56) следуют из формул компактной схемы метода Гаусса, примененной для сеточной задачи (2.51), (2.52).

## 2.4. Программная реализация и примеры расчетов

Рассматриваются вопросы численного решения краевой задачи для уравнения конвекции-диффузии, которая является модельной для задач механики сплошной среды. Строятся два типа разностных схем, когда для аппроксимации оператора конвективного переноса используются центральные разности второго порядка аппроксимации и направленные разности первого порядка. Приведена программа решения рассматриваемой модельной задачи и представлены результаты расчетов.

### 2.4.1. Постановка задачи

При изложении проблем теоретического исследования приближенных методов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений мы ограничились простейшей краевой задачей (2.1), (2.2). Вопросы практического использования численных методов проиллюстрируем на примере решения несколько более общей задачи для уравнения типа (2.5).

Будем рассматривать краевую задачу Дирихле для **уравнения конвекции-диффузии**:

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + v(x) \frac{du}{dx} = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (2.64)$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2 \quad (2.65)$$

при  $k(x) \geq \kappa > 0$ .

В различных прикладных задачах преобладающее влияние может иметь или диффузионный (член с коэффициентом диффузии  $k(x)$  в уравнении (2.64)), или конвективный перенос (член со скоростью  $v(x)$ ). Для оценки важности конвективного переноса служит **число Пекле**, которое появляется при обезразмеривании уравнения конвекции-диффузии:

$$Pe = \frac{v_0 l}{k_0}, \quad (2.66)$$

где  $v_0$  — характерная скорость, а  $k_0$  — характерный коэффициент диффузии. В уравнении движения сплошной среды в качестве такого параметра выступает число Рейнольдса.

При  $Pe \ll 1$  мы имеем процесс с **доминированием диффузии**, а при  $Pe \gg 1$  — **доминирует конвекция**. В первом случае мы приходим к регулярно возмущенным задачам (малый параметр  $Pe$  при младших производных), в случае сильного доминирования конвекции — сингулярно возмущенным задачам (малый параметр  $Pe^{-1}$  при старших производных). Сингулярно возмущенные задачи характеризуются наличием областей сильного изменения решения, в частности, пограничными и внутренними переходными слоями.

Обработку вычислительных алгоритмов для приближенного решения задач конвекции-диффузии можно провести на задаче с постоянными коэффициентами и однородными граничными условиями

$$k(x) = \kappa, \quad v(x) = 1, \quad f(x) = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0. \quad (2.67)$$

Точное решение задачи (2.64), (2.65), (2.66) имеет вид

$$u(x) = x - l \frac{\exp \{x/\kappa\} - 1}{\exp \{l/\kappa\} - 1}.$$

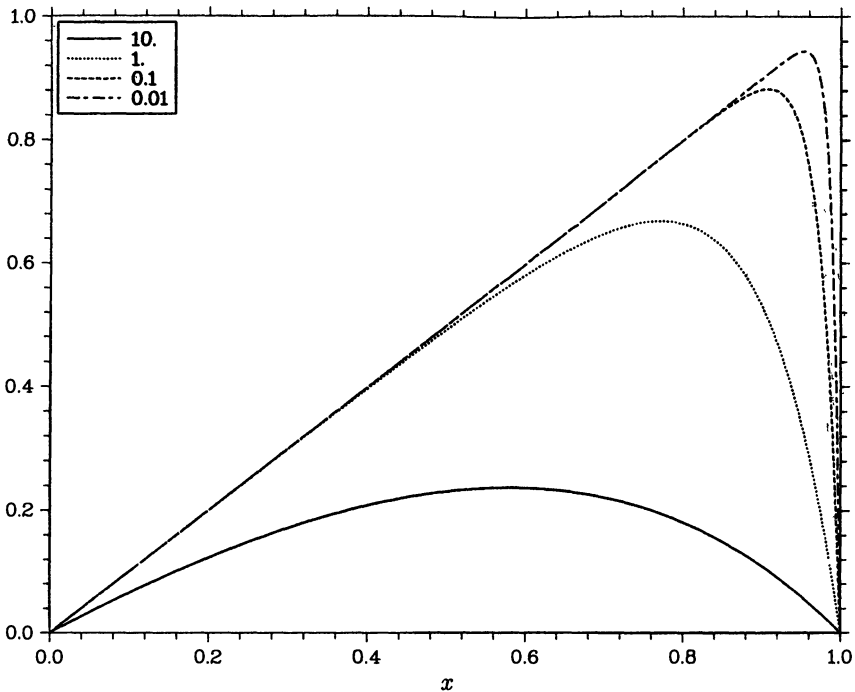


Рис. 2.2. Точное решение задачи конвекции-диффузии

Особенности задачи при доминировании конвекции (малые коэффициенты диффузии) прослеживаются на рис. 2.2, где показано решение задачи с  $l = 1$ ,  $\kappa = 10, 1, 0.1, 0.01$ . При уменьшении коэффициента диффузии вблизи правой границы формируется пограничный слой (область больших градиентов решения).

### 2.4.2. Разностные схемы

При рассмотрении одномерных задач конвекции-диффузии (2.64), (2.65) мы ориентируемся на использование трехточечных разностных схем, которые запишем для внутренних узлов в виде (2.51), (2.52). Будем рассматривать разностные схемы (2.51), (2.52), в которых

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.68)$$

Сформулируем критерий **монотонности разностной схемы**, т. е. сформулируем условия, при которых разностная схема (2.51), (2.52) удовлетворяет **разностному принципу максимума**.

**Теорема 2.2** (Принцип максимума). Пусть в разностной схеме (2.51), (2.52), (2.68)  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  и  $\varphi_i \geq 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  (или же  $\mu_1 \leq 0$ ,  $\mu_2 \leq 0$  и  $\varphi_i \leq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ). Тогда при выполнении условий

$$\gamma_i \geq \alpha_i + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.69)$$

имеет место  $y_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  ( $y_i \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ).

*Доказательство.* Проведем рассуждения от противного. Пусть при выполнении условий (2.69) разностное решение уравнения (2.51) при неотрицательной правой части и граничных условиях не во всех узлах сетки неотрицательно. Обозначим через  $k$  узел сетки, в котором решение принимает наименьшее отрицательное значение. Если это значение достигается в нескольких узлах, то выберем тот узел, для которого  $y_{k-1} > y_k$ . Запишем разностное уравнение в этом узле:

$$-\alpha_k y_{k-1} + \gamma_k y_k - \beta_k y_{k+1} = \varphi_k.$$

Правая часть неотрицательна, а для левой части с учетом (2.68), (2.69) имеем

$$\begin{aligned} & -\alpha_k y_{k-1} + \gamma_k y_k - \beta_k y_{k+1} = \\ & = \alpha_k (y_k - y_{k-1}) + (\gamma_k - \alpha_k - \beta_k) y_k + \beta_k (y_k - y_{k+1}) > 0. \end{aligned}$$

На основе полученного противоречия устанавливается, что  $y_i \geq 0$  для всех узлов  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ . ■

Для приближенного решения задачи (2.64), (2.65) будем использовать простейшую разностную схему с центрально-разностными аппроксимациями конвективного слагаемого. Во внутренних узлах расчетной сетки дифференциальное уравнение (2.64) аппроксимируем со вторым порядком разностным уравнением

$$-(ay_{\bar{x}})_x + by_{\bar{x}} = \varphi, \quad x \in \omega, \quad (2.70)$$

где, например,  $a(x) = k(x - 0,5h)$ ,  $b(x) = v(x)$  в задачах с гладкими коэффициентами.

Разностную схему (2.52), (2.70) запишем в виде (2.51), (2.52) при

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{v_i}{2h} + \frac{1}{h^2} k_{i-1/2}, & \beta_i &= -\frac{v_i}{2h} + \frac{1}{h^2} k_{i+1/2}, & \gamma_i &= \frac{1}{h^2} (k_{i-1/2} + k_{i+1/2}), \\ & & & & i &= 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Достаточные условия монотонности (2.68), (2.69) (условия выполнения принципа максимума) для рассматриваемой схемы с аппроксимацией конвективного слагаемого центральными разностями будут выполнены

лишь при достаточно малых шагах сетки (малых коэффициентах конвективного переноса). Не принимая во внимание знака скорости, эти ограничения запишем в виде

$$Pe_i \equiv \frac{|v_i| h}{\min\{k_{i-1/2}, k_{i+1/2}\}} < 2, \quad (2.71)$$

где  $Pe_i$  — **сеточное число Пекле**. Следовательно, для того чтобы получить монотонную разностную схему мы должны использовать достаточно подробную расчетную сетку. В силу ограничений (2.71) можно говорить только об условной монотонности разностной схемы (2.52), (2.70).

Безусловно монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии можно построить при использовании для конвективного слагаемого аппроксимаций первого порядка направленными разностями. Используем обозначения

$$\begin{aligned} b(x) &= b^+(x) + b^-(x), \\ b^+(x) &= \frac{1}{2}(b(x) + |b(x)|) \geq 0, \\ b^-(x) &= \frac{1}{2}(b(x) - |b(x)|) \leq 0 \end{aligned}$$

для неположительной и неотрицательной частей сеточной функции  $b(x)$ ,  $x \in \omega$ . Вместо (2.70) будем использовать разностную схему

$$-(ay_{\bar{x}})_x + b^+ y_{\bar{x}} + b^- y_x = \varphi, \quad x \in \omega. \quad (2.72)$$

Для схемы (2.52), (2.72) имеем представление (2.5), (2.52) с коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{v_i^+}{h} + \frac{1}{h^2} k_{i-1/2}, & \beta_i &= -\frac{v_i^-}{h} + \frac{1}{h^2} k_{i+1/2}, & \gamma_i &= \frac{|v_i|}{h} + \frac{1}{h^2} (k_{i-1/2} + k_{i+1/2}), \\ & & & & i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Непосредственно убеждаемся в выполнимости достаточных условий монотонности (2.68), (2.69).

Схема с направленными разностями является монотонной при любых шагах сетки. Ее недостатки связаны с тем, что в отличие от схемы с центральными разностями, она имеет лишь первый порядок аппроксимации.

### 2.4.3. Программа

Реализация разностных схем (2.52), (2.70) и (2.52), (2.72) связана с численным решением системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Как отмечалось выше, для таких задач



можно воспользоваться алгоритмом прогонки. Корректность этого алгоритма обеспечена при условии диагонального преобладания (см. лемму 2.3). Для немонотонных разностных схем типа (2.52), (2.70) необходимо ориентироваться на применение более общих алгоритмов. Речь идет о немонотонной прогонке, которая может рассматриваться как метод Гаусса с выбором главного элемента при решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений.

Мы используем подпрограмму SGTSL из хорошо известного пакета линейной алгебры LINPACK.

```

SUBROUTINE SGTSL (N, C, D, E, B, INFO)
C***BEGIN PROLOGUE  SGTSL
C***PURPOSE  Solve a tridiagonal linear system.
C***LIBRARY  SLATEC (LINPACK)
C***CATEGORY  D2A2A
C***TYPE     SINGLE PRECISION (SGTSL-S, DGTSL-D, CGTSL-C)
C***KEYWORDS  LINEAR ALGEBRA, LINPACK, MATRIX, SOLVE, TRIDIAGONAL
C***AUTHOR  Dongarra, J., (ANL)
C***DESCRIPTION
C
C   SGTSL given a general tridiagonal matrix and a right hand
C   side will find the solution.
C
C   On Entry
C
C       N       INTEGER
C               is the order of the tridiagonal matrix.
C
C       C       REAL(N)
C               is the subdiagonal of the tridiagonal matrix.
C               C(2) through C(N) should contain the subdiagonal.
C               On output, C is destroyed.
C
C       D       REAL(N)
C               is the diagonal of the tridiagonal matrix.
C               On output, D is destroyed.
C
C       E       REAL(N)
C               is the superdiagonal of the tridiagonal matrix.
C               E(1) through E(N-1) should contain the superdiagonal.
C               On output, E is destroyed.
C
C       B       REAL(N)
C               is the right hand side vector.
C
C   On Return
C
C       B       is the solution vector.
C
C       INFO    INTEGER
C               = 0 normal value.
C               = K if the K-th element of the diagonal becomes

```

```

C          exactly zero. The subroutine returns when
C          this is detected.
C
C***REFERENCES  J. J. Dongarra, J. R. Bunch, C. B. Moler, and G. W.
C                Stewart, LINPACK Users' Guide, SIAM, 1979.
C***ROUTINES CALLED  (NONE)
C***REVISION HISTORY  (YMMDD)
C  780814  DATE WRITTEN
C  890831  Modified array declarations.  (WRB)
C  890831  REVISION DATE from Version 3.2
C  891214  Prologue converted to Version 4.0 format.  (BAB)
C  900326  Removed duplicate information from DESCRIPTION section.
C          (WRB)
C  920501  Reformatted the REFERENCES section.  (WRB)
C***END PROLOGUE  SGTSL
      INTEGER N,INFO
      REAL C(*),D(*),E(*),B(*)
C
      INTEGER K,KB,KP1,NM1,NM2
      REAL T
C***FIRST EXECUTABLE STATEMENT  SGTSL
      INFO = 0
      C(1) = D(1)
      NM1 = N - 1
      IF (NM1 .LT. 1) GO TO 40
      D(1) = E(1)
      E(1) = 0.0E0
      E(N) = 0.0E0
C
      DO 30 K = 1, NM1
        KP1 = K + 1
C
C          FIND THE LARGEST OF THE TWO ROWS
C
C          IF (ABS(C(KP1)) .LT. ABS(C(K))) GO TO 10
C
C          INTERCHANGE ROW
C
C          T = C(KP1)
C          C(KP1) = C(K)
C          C(K) = T
C          T = D(KP1)
C          D(KP1) = D(K)
C          D(K) = T
C          T = E(KP1)
C          E(KP1) = E(K)
C          E(K) = T
C          T = B(KP1)
C          B(KP1) = B(K)
C          B(K) = T
      10    CONTINUE
C
C          ZERO ELEMENTS

```

```

C
      IF (C(K) .NE. 0.0E0) GO TO 20
      INFO = K
      GO TO 100
20    CONTINUE
      T = -C(KP1)/C(K)
      C(KP1) = D(KP1) + T*D(K)
      D(KP1) = E(KP1) + T*E(K)
      E(KP1) = 0.0E0
      B(KP1) = B(KP1) + T*B(K)
30    CONTINUE
40    CONTINUE
      IF (C(N) .NE. 0.0E0) GO TO 50
      INFO = N
      GO TO 90
50    CONTINUE
C
C      BACK SOLVE
C
      NM2 = N - 2
      B(N) = B(N)/C(N)
      IF (N .EQ. 1) GO TO 80
      B(NM1) = (B(NM1) - D(NM1)*B(N))/C(NM1)
      IF (NM2 .LT. 1) GO TO 70
      DO 60 KB = 1, NM2
        K = NM2 - KB + 1
        B(K) = (B(K) - D(K)*B(K+1) - E(K)*B(K+2))/C(K)
60    CONTINUE
70    CONTINUE
80    CONTINUE
90    CONTINUE
100 CONTINUE
C
      RETURN
      END

```

Приведем также программу, которая решает сеточную задачу конвекции-диффузии при использовании двух способов аппроксимации конвективного слагаемого в уравнении (2.64).

### Программа PROBLEM1

```

C
C      PROBLEM1 - ОДНОМЕРНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ
C
      REAL KAPPA
      PARAMETER (KAPPA = 0.01, ISHEME = 0, N = 20 )
      DIMENSION Y(N+1), X(N+1), PHI(N+1)
      +          ,ALPHA(N+1), BETA(N+1), GAMMA(N+1)
C
C      ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C      XL, XR - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;

```

```

C   KAPPA      - КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ
C   ISCHEME   - ЦЕНТРАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ (ISCHEME = 0),
C             СХЕМА С НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ;
C   N + 1     - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ;
C   Y(N+1)    - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ
C
C   XL = 0.
C   XR = 1.
C
C   OPEN (01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H = (XR - XL)/N
C   DO I = 1, N+1
C     X(I) = XL + (I-1)*H
C   END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ
C
C   GAMMA(1) = 1.
C   BETA(1)  = 0.
C   PHI(1)   = 0.
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОМ КОНЦЕ
C
C   ALPHA(N+1) = 0.
C   GAMMA(N+1) = 1.
C   PHI(N+1)   = 0.
C
C   ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ
C
C   IF (ISCHEME.EQ.0) THEN
C
C   СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ
C
C     DO I = 2,N
C       ALPHA(I) = V(X(I))/(2.*H) + KAPPA/(H*H)
C       BETA(I)  = - V(X(I))/(2.*H) + KAPPA/(H*H)
C       GAMMA(I) = ALPHA(I) + BETA(I)
C       PHI(I)   = F(X(I))
C     END DO
C   ELSE
C
C   СХЕМА С АППРОКСИМАЦИЯМИ НАПРАВЛЕННЫМИ РАЗНОСТЯМИ
C
C     DO I = 2,N
C       VP = 0.5*(V(X(I)) + ABS(V(X(I))))
C       VM = 0.5*(V(X(I)) - ABS(V(X(I))))
C       ALPHA(I) = VP/H + KAPPA/(H*H)
C       BETA(I)  = - VM/H + KAPPA/(H*H)
C       GAMMA(I) = ALPHA(I) + BETA(I)
C       PHI(I)   = F(X(I))
C     END DO

```

```

        END DO
    END IF
C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
    DO I = 1,N+1
        ALPHA(I) = - ALPHA(I)
        BETA(I) = - BETA(I)
    END DO
    CALL SGTSL (N+1, ALPHA, GAMMA, BETA, PHI, INFO)
    IF (INFO.NE.0) STOP ! ПЛОХАЯ МАТРИЦА
C
C   ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ
C
    AL = XR - XL
    DO I = 1,N+1
        Y(I) = X(I) - AL*EXP((X(I)-AL)/(2.*KAPPA)) *
+          SINH(X(I)/(2.*KAPPA)) / SINH(AL/(2.*KAPPA))
    END DO
C
C   ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
C
    EC = 0.
    EL2 = 0.
    DO I = 1,N+1
        AA = ABS(PHI(I) - Y(I))
        IF (AA.GT.EC) EC = AA
        EL2 = EL2 + AA*AA
    END DO
    EL2 = SQRT(EL2*H)
    WRITE (01,*) KAPPA
    WRITE (01,*) N+1, EC, EL2
    WRITE (01,*) X
    WRITE (01,*) Y
    WRITE (01,*) PHI
    CLOSE (01)
    STOP
    END

FUNCTION F(X)
C
C   ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ
C
    F = 1.
    RETURN
    END

FUNCTION V(X)
C
C   КОЭФФИЦИЕНТ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА
C
    V = 1.
    RETURN
    END

```

### 2.4.4. Результаты расчетов

Проиллюстрируем сходимость рассматриваемых разностных схем, используя данные расчетов на последовательности сеток. Расчеты выполнены для задачи (2.64), (2.65) при задании параметров согласно (2.67). Приближенное решение сравнивается с точным в сеточных нормах в  $L_2(\omega)$  и  $C(\omega)$ .

Таблица 2.1

Точность схемы с направленными разностями

$N$	10	20	40	80	160
$C$	0,1599	0,2036	0,1579	0,09219	0,05070
$L_2$	0,03631	0,03451	0,02339	0,01340	0,007199

В табл. 2.1 представлены данные по решению задачи с доминирующим конвективным переносом ( $\kappa = 0,01$ ) при использовании схемы (2.72). Теоретические соображения о сходимости схем при стремлении шага расчетной сетки к нулю подтверждаются. Схема с направленными разностями сходится с первым порядком, но выход на эту асимптотическую сходимость обнаруживается в нашем случае на достаточно подробных сетках (начиная с  $N = 80$ ). На рис. 2.3 (с. 58) представлены графики приближенного решения.

Аналогичные данные для схемы (2.70) представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Точность схемы с центрально-разностными аппроксимациями

$N$	10	20	40	80	160
$C$	0,4353	0,1932	0,05574	0,01212	0,003003
$L_2$	0,1074	0,03056	0,007142	0,001677	0,0004062

Погрешность падает примерно в четыре раза при сгущении сетки в два раза (сходимость со вторым порядком). Необходимо отметить, что для данного примера нарушение условия монотонности (2.71) имеет место на сетках с  $N = 10, 20, 40$ . Невыполнение этого условия приводит к существенным искажениям поведения решения (см. рис. 2.4, с. 59). Можно даже говорить, что в этом случае использование немонотонных схем просто невозможно.

## 2.5. Задачи и упражнения

2.1. На решениях уравнения (2.1) аппроксимируйте граничные условия третьего рода (2.4) со вторым порядком.

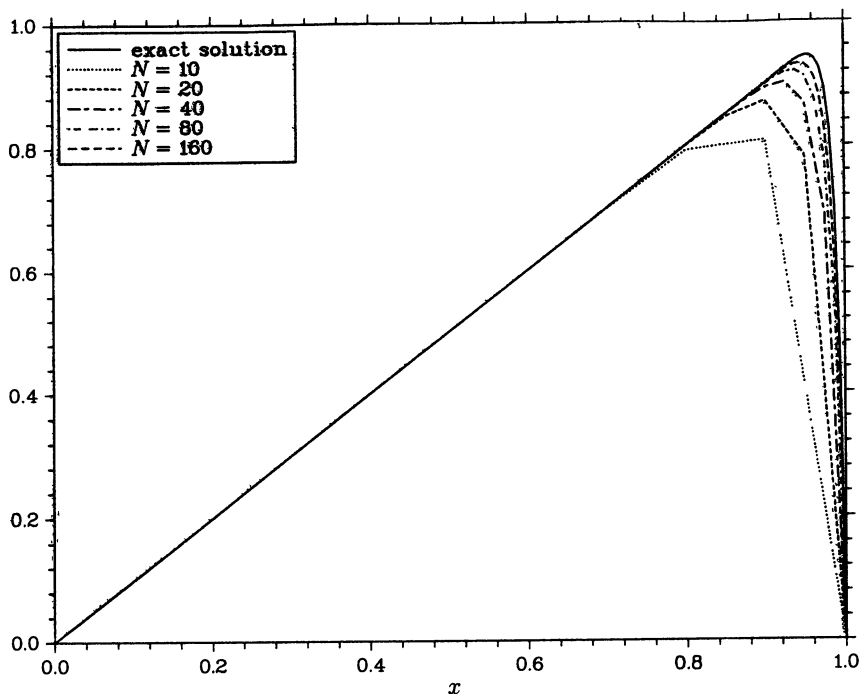


Рис. 2.3. Приближенное решение (схема с направленными разностями)

## 2.2. На неравномерной сетке

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$$

постройте и исследуйте разностную схему

$$-\frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) + c_i y_i = \varphi_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

для приближенного решения задачи (2.1), (2.2).

**2.3.** Аппроксимируйте граничные условия третьего рода (2.4) со вторым порядком для решения уравнения (2.1) при использовании расширенной на полшага сетки:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = -\frac{h}{2}, \quad x_N = l + \frac{h}{2}.$$

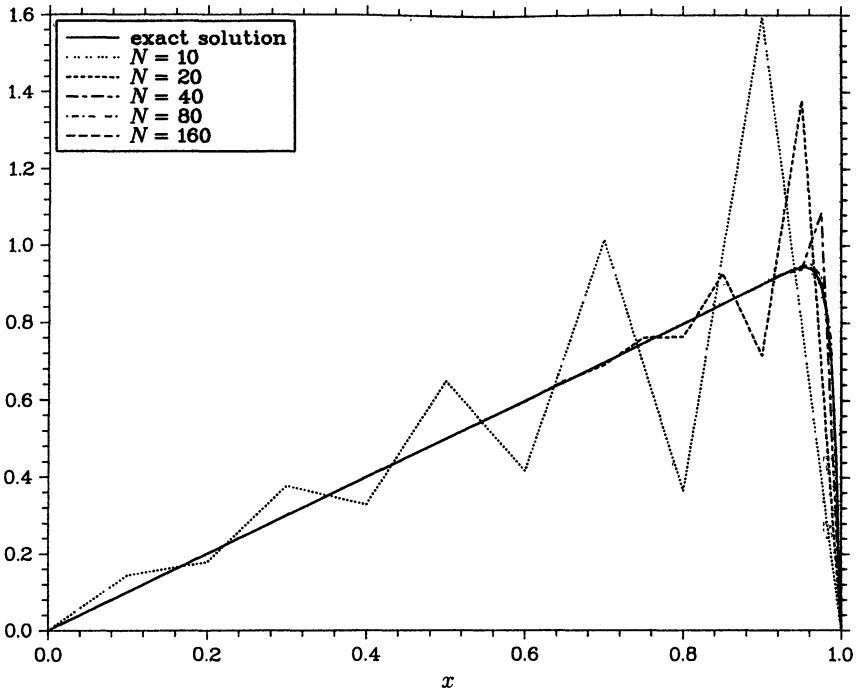


Рис. 2.4. Схема с центрально-разностными аппроксимациями

2.4. Покажите, что разностная схема

$$-(ay_{\bar{x}})_x = \varphi(x), \quad x \in \omega,$$

в которой

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1},$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h^2} \left( a_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \int_{x_i}^x f(s) ds + a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \int_x^{x_i} f(s) ds \right)$$

для приближенного решения уравнения

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad 0 < x < l$$

с граничными условиями (2.2) является точной.



**2.5.** Постройте абсолютно монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации для краевой задачи (2.64), (2.65) на основе перехода к уравнению

$$-\frac{d}{dx} \left( \tilde{k}(x) \frac{du}{dx} \right) + \tilde{q}(x)u = \tilde{f}(x), \quad 0 < x < l.$$

**2.6.** Для краевой задачи (2.1) с однородными граничными условиями

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0$$

постройте схему конечных элементов с представлением решения в виде (2.22) на основе минимизации функционала (метод Рунта)

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( k(x) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + q(x)v^2(x) \right) dx - \int_0^l f(x)v(x) dx.$$

**2.7.** Докажите разностное неравенство Фридрикса (лемма 2.1) в случае, если  $N$  — четное.

**2.8.** Докажите разностное неравенство Фридрикса для сеточных функций, заданных на неравномерной сетке

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l\}$$

с  $h_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$ .

**2.9.** Докажите, что для всякой сеточной функции  $y(x)$ , заданной на равномерной сетке  $\bar{\omega}$  и обращающейся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ , справедливо неравенство (теорема вложения для сеточных функций)

$$\|y(x)\|_{C(\omega)} \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\|^+.$$

**2.10.** Найдите собственные функции и собственные значения разностной задачи

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad x \in \omega, \\ y_0 = 0, \quad y_N = 0.$$

**2.11.** Пусть при решении краевой задачи

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = 0, \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0$$

используется разностная схема

$$-k(x)y_{\bar{x}x} - k_x y_x^{\circ} = 0.$$

Покажите, что эта схема расходится в классе разрывных коэффициентов. Проведите численные эксперименты.

**2.12.** Пусть выполнены условия

$$|\alpha_i| > 0, \quad |\beta_i| > 0, \quad \delta_i = |\gamma_i| - |\alpha_i| - |\beta_i| > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Докажите, что в этих условиях для решения задачи

$$\begin{aligned} -\alpha_i y_{i-1} + \gamma_i y_i - \beta_i y_{i+1} &= \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= 0, \quad y_N = 0 \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\|y\|_{C\omega} \leq \left\| \frac{\varphi}{\delta} \right\|_{C\omega}.$$

**2.13.** Пусть в разностной схеме (2.51), (2.52), (2.68)  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  и  $\varphi_i \geq 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N-1$  (или же  $\mu_1 \leq 0$ ,  $\mu_2 \leq 0$  и  $\varphi_i \leq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, N-1$ ). Тогда при выполнении условий (см. теорему 2.2)

$$\begin{aligned} \gamma_i &\geq \alpha_{i+1} + \beta_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ \gamma_1 &> \alpha_2, \quad \gamma_{N-1} > \beta_{N-2} \end{aligned}$$

имеет место

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1).$$

**2.14.** Постройте вариант метода прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -\alpha_0 y_N + \gamma_0 y_0 - \beta_0 y_1 &= \varphi_0, \\ -\alpha_i y_{i-1} + \gamma_i y_i - \beta_i y_{i+1} &= \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ -\alpha_N y_{N-1} + \gamma_N y_N - \beta_N y_0 &= \varphi_N, \end{aligned}$$

которая возникает, например, при рассмотрении краевой задачи для уравнения (2.1) с периодическими краевыми условиями.

**2.15.** Для численного решения задачи (2.64), (2.65), (2.67) постройте разностную схему на кусочно-постоянной сетке — используйте равномерные сетки на отрезках  $[0, x^*]$  и  $[x^*, l]$  со сгущением вблизи  $x = l$ . Напишите программу и проведите вычислительные эксперименты по исследованию скорости сходимости используемой разностной схемы.

## Глава 3

---

### Краевые задачи для эллиптических уравнений

Среди стационарных задач математической физики наиболее важными для приложений являются краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Для модельной двумерной задачи рассматриваются проблемы построения дискретных аналогов при использовании регулярных прямоугольных сеток на основе конечно-разностных аппроксимаций. Исследование сходимости приближенного решения к точному проводится в сеточных гильбертовых пространствах с привлечением свойств положительной определенности сеточного эллиптического оператора. Исследование сходимости в равномерной норме базируется на принципе максимума для сеточных эллиптических уравнений. При решении сеточных уравнений, которые возникают при дискретизации краевых задач для эллиптических уравнений, наиболее часто используются итерационные методы. Наибольшего внимания заслуживают попеременно-треугольные итерационные методы. Представлена программа для решения задачи Дирихле в прямоугольнике для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, приведены также примеры выполненных расчетов.

#### 3.1. Сеточная эллиптическая задача

Рассматриваются проблемы аппроксимации для модельных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Основной подход связан с использованием интегро-интерполяционного метода (метода баланса). Отмечается возможность построения сеточной задачи на основе конечно-элементной аппроксимации. Кратко обсуждаются проблемы конечно-разностной аппроксимации краевых задач в нерегулярных областях.

### 3.1.1. Краевые задачи

В своем рассмотрении основное внимание мы будем уделять двумерным краевым задачам, когда расчетная область имеет наиболее простой вид

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

т. е. является прямоугольником. Главным объектом нашего исследования будет эллиптическое уравнение второго порядка

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.1)$$

На коэффициенты уравнения накладываются ограничения

$$k(x) \geq \kappa > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Характерным и наиболее простым примером эллиптического уравнения второго порядка является уравнение Пуассона

$$-\Delta u \equiv -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.2)$$

В этом случае в уравнении (3.1)  $k(x) = 1$  и  $q(x) = 0$ .

Уравнение (3.1) дополняется некоторыми граничными условиями. В случае задачи Дирихле граничные условия имеют вид

$$u(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.3)$$

В более сложных случаях на границе области или ее части задаются граничные условия второго или третьего рода, например,

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.4)$$

где, напомним,  $n$  — внешняя по отношению к  $\Omega$  нормаль.

### 3.1.2. Сеточная задача

Будем использовать равномерную по каждому направлению сетку. Для сеток по отдельным направлениям  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  используем обозначения

$$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}, \\ \omega_\alpha^+ &= \{x_\alpha \mid x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}. \end{aligned}$$

Для сетки в прямоугольнике  $\Omega$  положим

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha, \alpha = 1, 2\}, \quad \omega = \omega_1 \times \omega_2.$$

Для гладких коэффициентов уравнения (3.1) разностная схема строится на основе непосредственного перехода от дифференциальных операторов к разностным. Подобно одномерному случаю для краевой задачи (3.1), (3.3) поставим в соответствие разностное уравнение

$$Ay = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad (3.5)$$

в котором

$$A = \sum_{\alpha=1}^2 A^{(\alpha)}, \quad x \in \omega, \quad (3.6)$$

$$A^{(\alpha)}y = -(a^{(\alpha)}y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \theta_\alpha c(x)y, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \omega,$$

где  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ .

Для коэффициентов при старших производных можно положить

$$a^{(1)}(x) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \quad x_1 \in \omega_1^+, \quad x_2 \in \omega_2,$$

$$a^{(2)}(x) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2), \quad x_1 \in \omega_1, \quad x_2 \in \omega_2^+.$$

Для младшего коэффициента и правой части (3.5), (3.6) имеем

$$c(x) = q(x), \quad \varphi(x) = f(x), \quad x \in \omega.$$

В граничных узлах  $\partial\omega$  ( $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ ) используется выражение

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\omega \quad (3.7)$$

для аппроксимации краевых условий (3.3).

Наиболее конструктивный подход к построению разностных схем связан с использованием интегро-интерполяционного метода. Это относится, прежде всего, к общему случаю нерегулярных сеток (например, треугольных), но также и к наиболее простым прямоугольным сеткам. В нашем случае равномерной прямоугольной сетки интегрирование уравнения (3.1) ведется по контрольному объему для отдельного внутреннего узла (см. рис. 3.1)  $x$  сетки  $\omega$ :

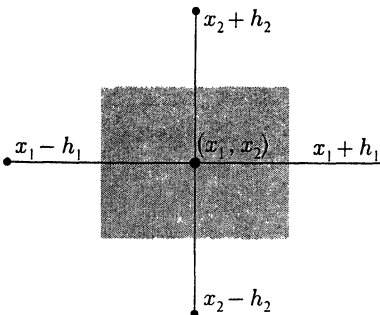


Рис. 3.1. Контрольный объем

$$\Omega_x = \{s \mid s = (s_1, s_2),$$

$$x_1 - 0,5h_1 \leq s_1 \leq x_1 + 0,5h_1,$$

$$x_2 - 0,5h_2 \leq s_2 \leq x_2 + 0,5h_2\}.$$

Подобно одномерному случаю приходим к разностной схеме (3.5), (3.6), в которой

$$a^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_2} \int_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} \left( \frac{1}{h_1} \int_{x_1-h_1}^{x_1} \frac{ds_1}{k(s)} \right)^{-1} ds_2,$$

$$a^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1} \int_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} \left( \frac{1}{h_2} \int_{x_2-h_2}^{x_2} \frac{ds_2}{k(s)} \right)^{-1} ds_1.$$

Правая часть и младший член аппроксимируются выражениями

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} \int_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} f(\mathbf{x}) dx,$$

$$c(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1-0,5h_1}^{x_1+0,5h_1} \int_{x_2-0,5h_2}^{x_2+0,5h_2} q(\mathbf{x}) dx.$$

Аналогично строятся разностные схемы и при использовании нерегулярных сеток.

### 3.1.3. Задачи в нерегулярных областях

Определенные сложности возникают при численном решении краевых задач для эллиптических уравнений в сложных расчетных **нерегулярных областях**. До сих пор мы рассматривали задачи в прямоугольной области (**регулярной расчетной области**). Этот достаточно сложный комплекс проблем мы не будем обсуждать подробно, ограничившись лишь кратким упоминанием некоторых основных направлений исследований.

Традиционно широко используются нерегулярные расчетные сетки для приближенного решения стационарных краевых задач математической физики. Среди нерегулярных сеток выделим два основных класса.

**Структурированные сетки.** Наиболее важным примером таких сеток являются нерегулярные четырехугольные сетки, которые во многом наследуют (топологически эквивалентны) свойства стандартных прямоугольных сеток.

**Неструктурированные сетки.** В этом случае шаблон разностной схемы не сохраняет структуру. Нет возможности топологически связать расчетную сетку с регулярной прямоугольной сеткой. В частности, схема пишется в каждой точке с разным числом соседей.

Аппроксимация на структурированных сетках может проводиться на основе отмеченной близости этих сеток к стандартным прямоугольным сеткам. Наиболее просто эта ситуация реализуется в рамках использования новых независимых переменных.

Вторая возможность не связана с формальным введением новых координат и реализуется на основе аппроксимации исходной задачи на такой нерегулярной сетке. Понятно, что использование простейших подходов для построения разностных схем на основе неопределенных коэффициентов для нерегулярных сеток хотя и возможно, но не является конструктивно оправданным. В этом случае необходимо использовать метод баланса. Как для общих неструктурированных сеток, так и для структурированных можно строить разностные схемы на основе конечноэлементных аппроксимаций.

В ряде случаев для нерегулярных областей удастся построить согласованную сетку, которая образована узлами обычной прямоугольной неравномерной сетки с узлами, лежащими на границе. Для того чтобы граница состояла из узлов, приходится использовать сильно неравномерные сетки. Проблемы построения разностной схемы для задачи на согласованной сетке решаются обычным образом.

Построить согласованную разностную сетку можно только для очень узкого класса областей. Поэтому проблема нерегулярности расчетной области решается на основе других подходов. Простейшим приемом является использование в расчетной области обычной прямоугольной сетки, а граничное условие переносится в ближайший к границе узел сетки. Фактически речь здесь идет о переходе от исходной задачи (3.1), (3.3) к задаче в другой области, граница которой согласована с сеткой (аппроксимация границы).

Наиболее естественным и достаточно универсальным является подход с использованием сетки, которая состоит из узлов регулярной (равномерной) сетки (внутренние узлы) и дополнительных нерегулярных граничных узлов, лежащих на границе области. Эти узлы образованы пересечением линий, проходящих через узлы регулярной сетки, с границей расчетной области.

Большой технологичностью при приближенном решении краевых задач в нерегулярных областях обладает **метод фиктивных областей**. Он основан на дополнении исходной расчетной области до некоторой регулярной области  $\Omega_0$  ( $\Omega \subset \Omega_0$ ), например, до прямоугольника в двумерных задачах (рис. 3.2). После этого задача в  $\Omega_0$  решается обычными разностными методами. Необходимо так продолжить решение исходной задачи в фиктивную область  $\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Omega$ , чтобы разностное решение задачи в расширенной области  $\Omega_0$  давало приближенное решение в исходной области  $\Omega$ .

Задача в расширенной области характеризуется наличием малых (больших) коэффициентов дифференциального уравнения. Это обуславливает необходимость специального исследования вопросов точности и вычислительной реализации итерационных методов решения соответствующих задач.

Альтернативным методом фиктивных областей подход к приближенному решению краевых задач в нерегулярных расчетных областях является **метод декомпозиции** (разделения) расчетной области на простые подобласти.

Такой подход активно обсуждается применительно к разработке методов решения краевых задач на компьютерах современной параллельной архитектуры.

В каждой отдельной подобласти решаются свои краевые задачи, связь осуществляется посредством граничных условий. В подобластях может вводиться своя сетка, согласованная или несогласованная с сетками в других подобластях. Поэтому разностные схемы декомпозиции области на сеточном уровне могут интерпретироваться как разностные методы на составных сетках.

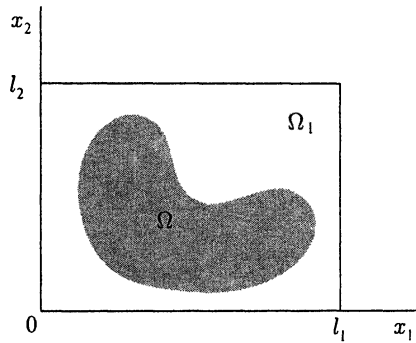


Рис. 3.2. Метод фиктивных областей

## 3.2. Погрешность приближенного решения

Кратко отметим возможности исследования скорости сходимости приближенного решения к точному. Рассмотрение базируется на изучении свойств самосопряженности, положительной определенности и монотонности сеточных эллиптических операторов.

### 3.2.1. Сеточные эллиптические операторы

Отметим некоторые основные свойства разностных операторов, которые возникают при приближенном решении модельной задачи (3.1), (3.3). Как и при рассмотрении одномерных задач переформулируем (за счет изменения правой части в приграничных узлах) разностную задачу (3.5), (3.7) как задачу с однородными граничными условиями.

Для сеточных функций, обращающихся в нуль на множестве граничных узлов  $\partial\omega$ , определим гильбертово пространство  $H = L_2(\omega)$ , в котором скалярное произведение и норма задаются следующим образом:

$$(y, w) \equiv \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h_1h_2, \quad \|y\| \equiv (y, y)^{1/2}.$$



Среди важнейших выделим свойство самосопряженности разностного эллиптического оператора (3.5). Свойство самосопряженности оператора  $A$  вытекает в силу представления (3.6) из самосопряженности одномерных операторов  $A^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Принимая это во внимание, получим

$$\begin{aligned} (Ay, w) &= \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1} A^{(1)} y(x) w(x) h_1 + \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2} A^{(2)} y(x) w(x) h_2 = \\ &= \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1} w(x) A^{(1)} y(x) h_1 + \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2} w(x) A^{(2)} y(x) h_2 = (y, Aw). \end{aligned}$$

Определим для двумерных сеточных функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$  сеточный аналог нормы в  $W_2^1(\omega)$ :

$$\|\nabla y\|^2 \equiv \sum_{x_1 \in \omega_1^+} \sum_{x_2 \in \omega_2} (y_{\bar{x}_1})^2 h_1 h_2 + \sum_{x_1 \in \omega_1} \sum_{x_2 \in \omega_2^+} (y_{\bar{x}_2})^2 h_1 h_2.$$

Для двумерного разностного оператора (3.6) имеет место неравенство

$$(Ay, y) \geq \kappa \|\nabla y\|^2, \quad (3.8)$$

так как

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= (A^{(1)} y, y) + (A^{(2)} y, y) = \\ &= \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{x_1 \in \omega_1^+} a^{(1)} (y_{\bar{x}_1})^2 h_1 + \sum_{x_1 \in \omega_1} h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2^+} a^{(2)} (y_{\bar{x}_2})^2 h_2 \end{aligned}$$

и  $a^{(\alpha)}(x) \geq \kappa$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Для оценки двумерного разностного оператора диффузионного переноса используем **неравенство Фридрихса для двумерных сеточных функций**.

**Лемма 3.1.** Для сеточных функций  $y(x)$ , обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , верно неравенство

$$\|y\|^2 \leq M_0 \|\nabla y\|^2, \quad M_0^{-1} = \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}. \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Принимая во внимание неравенство Фридрихса для одномерных сеточных функций (лемма 2.1), получим неравенство

$$\sum_{x_1 \in \omega_1^+} \sum_{x_2 \in \omega_2} (y_{\bar{x}_1})^2 h_1 h_2 + \sum_{x_1 \in \omega_1} \sum_{x_2 \in \omega_2^+} (y_{\bar{x}_2})^2 h_1 h_2 \geq \left( \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right) \sum_{x_1 \in \omega_1} \sum_{x_2 \in \omega_2} y^2 h_1 h_2,$$

из которого следует (3.9). ■

Из (3.8), (3.9) следует оценка оператора  $A$  снизу

$$A \geq \kappa \lambda_0 E, \quad \lambda_0 = M_0^{-1}. \quad (3.10)$$

Приведем также оценку рассматриваемого сеточного эллиптического оператора сверху.

**Лемма 3.2.** *Для разностного оператора  $A$  имеет место неравенство*

$$A \leq M_1 E \quad (3.11)$$

с постоянной

$$M_1 = \frac{4}{h_1^2} \max_{x \in \omega} \frac{a^{(1)}(x) + a^{(1)}(x_1 + h_1, x_2)}{2} + \\ + \frac{4}{h_2^2} \max_{x \in \omega} \frac{a^{(2)}(x) + a^{(2)}(x_1, x_2 + h_2)}{2} + \max_{x \in \omega} c(x).$$

*Доказательство* проводится аналогично одномерному случаю (см. лемму 2.2). ■

### 3.2.2. Сходимость разностного решения

На основе установленных свойств сеточного эллиптического оператора можно получить соответствующие априорные оценки. При рассмотрении задачи для погрешности приближенного решения и эти оценки позволяют сделать заключение о скорости сходимости разностных схем для задачи (3.1), (3.3). Такое исследование проведено нами ранее для одномерных стационарных задач. Здесь с небольшими редакционными изменениями проводится аналогичное рассмотрение для двумерных задач.

Задача для погрешности разностного решения

$$z(x) = y(x) - u(x), \quad x \in \bar{\omega}$$

с учетом (3.5) имеет вид

$$Az = \psi(x), \quad x \in \omega, \quad (3.12)$$

где  $\psi(x)$ , как обычно, погрешность аппроксимации:

$$\psi(x) = \varphi(x) - Au, \quad x \in \omega.$$

Будем считать, что краевая задача (3.1), (3.3) имеет достаточно гладкое классическое решение. Отметим в этой связи, что помимо гладкости коэффициентов уравнения, краевых условий и правой части для задачи в прямоугольнике  $\Omega$  требуется выполнение определенных условий согласования в углах. На равномерной прямоугольной сетке погрешность аппроксимации для задачи (3.5), (3.6) в этих условиях имеет второй порядок:

$$\psi(x) = O(|h|^2), \quad |h|^2 \equiv h_1^2 + h_2^2, \quad x \in \omega. \quad (3.13)$$

**Теорема 3.1.** Для разностной схемы (3.5) справедлива априорная оценка для погрешности

$$\|\nabla z\| \leq \frac{M_0^{1/2}}{\kappa} \|\psi\|. \quad (3.14)$$

*Доказательство.* Домножая уравнение для погрешности (3.12) скалярно на  $z(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \omega$ , получим

$$(Az, z) = (\psi, z).$$

Для правой части в силу неравенства (3.9)

$$(\psi, z) \leq \|\psi\| \cdot \|z\| \leq M_0^{1/2} \|\psi\| \cdot \|\nabla z\|.$$

Принимая во внимание неравенство (3.8), для левой части имеем

$$(Az, z) \geq \kappa \|\nabla z\|^2,$$

что и позволяет получить оценку (3.14). ■

Теорема 3.1 обеспечивает в условиях (3.13) сходимость разностного решения к точному со вторым порядком в сеточном аналоге  $W_2^1(\omega)$  соболевского пространства  $W_2^1(\Omega)$ .

### 3.2.3. Принцип максимума

Для решения краевой задачи (3.1), (3.3) справедлив принцип максимума. Хотелось бы сохранить это важное свойство и для решения разностной задачи (3.5), (3.7). Кроме того, на основе принципа максимума исследуется сходимость разностных схем в равномерной норме.

Сформулируем принцип максимума для разностных схем. Разностное уравнение (3.5) с граничными условиями (3.7) запишем в виде

$$Sy(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad (3.15)$$

где линейный оператор  $S$  определяется формулой

$$Sv(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(\mathbf{x})} B(\mathbf{x}, \xi)v(\xi). \quad (3.16)$$

Здесь  $\mathcal{W}(\mathbf{x})$  — шаблон, а  $\mathcal{W}' \equiv \mathcal{W} \setminus \{\mathbf{x}\}$  — окрестность узла  $\mathbf{x} \in \omega$ .

Будем считать, что для рассматриваемых эллиптических уравнений второго порядка шаблон  $\mathcal{W}$  для внутренних узлов расчетной сетки содержит узлы  $(x \pm h_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2 \pm h_2)$  (шаблон, как минимум, пятиточечный), а коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &> 0, \quad B(\mathbf{x}, \xi) > 0, \quad \xi \in \mathcal{W}'(\mathbf{x}), \\ D(\mathbf{x}) &= A(\mathbf{x}) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(\mathbf{x})} B(\mathbf{x}, \xi) > 0, \quad \mathbf{x} \in \omega. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для разностного уравнения (3.15), (3.16) при выполнении (3.17) справедлив принцип максимума.

**Теорема 3.2.** Пусть сеточная функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению (3.15), (3.16), для коэффициентов которого выполнены условия (3.17), и граничным условиям (3.7). При выполнении условий

$$\mu(x) \leq 0 \quad (\mu(x) \geq 0), \quad \varphi(x) \leq 0 \quad (\varphi(x) \geq 0), \quad x \in \omega$$

разностное решение удовлетворяет условиям  $y(x) \leq 0$  ( $y(x) \geq 0$ ),  $x \in \omega$ .

На основе принципа максимума устанавливаются теоремы сравнения для решений сеточных эллиптических уравнений. Рассмотрим, например, задачу

$$\begin{aligned} Sw(x) &= \phi(x), \quad x \in \omega, \\ w(x) &= \nu(x), \quad x \in \partial\omega \end{aligned}$$

и пусть

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \phi(x), \quad x \in \omega, \\ |\mu(x)| &\leq \nu(x), \quad x \in \partial\omega. \end{aligned}$$

Тогда для решения задачи (3.15), (3.7) справедлива оценка

$$|y(x)| \leq w(x), \quad x \in \bar{\omega}.$$

С привлечением таких оценок непосредственно устанавливается, что для решения однородного уравнения (3.15) ( $\varphi(x) = 0$ ,  $x \in \omega$ ) с граничными условиями (3.7) имеет место априорная оценка устойчивости по граничным условиям

$$\max_{x \in \omega} |y(x)| \leq \max_{x \in \partial\omega} |\mu(x)|.$$

С привлечением подобных априорных оценок доказывается сходимость разностных схем в равномерной норме. Проиллюстрируем это утверждение простейшим примером.

Будем использовать для приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (3.2), (3.3) разностное уравнение

$$-y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = \varphi(x), \quad x \in \omega, \quad (3.18)$$

дополнив его граничными условиями (3.7). Для погрешности

$$z(x) = y(x) - u(x), \quad x \in \bar{\omega}$$

получим задачу

$$\begin{aligned} -z_{\bar{x}_1 x_1} - z_{\bar{x}_2 x_2} &= \psi(x), \quad x \in \omega, \\ z(x) &= 0, \quad x \in \partial\omega, \end{aligned}$$

где  $\psi(\mathbf{x}) = O(h_1^2 + h_2^2)$  — погрешность аппроксимации. Выбрав в качестве мажорантной сеточную функцию

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_{C(\omega)},$$

где

$$\|v(\mathbf{x})\|_{C(\omega)} = \max_{\mathbf{x} \in \omega} |v(\mathbf{x})|,$$

для погрешности получим оценку

$$\|y(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})\|_{C(\omega)} \leq \frac{1}{4}(l_1^2 + l_2^2) \cdot \|\psi(\mathbf{x})\|_{C(\omega)}.$$

Тем самым разностная схема (3.18), (3.7) сходится в  $C(\omega)$  со вторым порядком.

### 3.3. Итерационные методы решения сеточных задач

При численном решении стационарных задач математической физики применяются итерационные методы, которые могут интерпретироваться как методы установления. Здесь приводятся основные понятия теории итерационных методов решения операторных уравнений, рассматриваемых в конечномерных гильбертовых пространствах. Обсуждается проблема выбора итерационных параметров и оператора перехода (переобуславливателя) на новое итерационное приближение.

#### 3.3.1. Прямые методы решения сеточных задач

Исходная дифференциальная задача при аппроксимации заменяется сеточной. Соответствующие разностные (сеточные) уравнения приводят к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных значений сеточной функции. Для их нахождения используются прямые и итерационные методы линейной алгебры, которые максимально учитывают специфику сеточных задач. Особенности сеточных задач проявляются в том, что соответствующая матрица системы алгебраических уравнений является разреженной, т. е. содержит много нулевых элементов, имеет ленточную структуру. При решении многомерных задач матрица имеет очень большой порядок, равный общему числу узлов сетки.

Прежде всего отметим возможности построения быстрых прямых методов для решения достаточно узкого круга сеточных эллиптических задач с разделяющимися переменными. Классический подход к решению простейших линейных задач математической физики связан с использованием метода разделения переменных. Естественно ожидать, что

аналогичная идея получит свое развитие и применительно к сеточным уравнениям. Рассмотрим сеточную задачу для уравнения Пуассона (3.18) с однородными краевыми условиями

$$y(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega. \quad (3.19)$$

Как мы уже отмечали выше, за счет модификации правой части мы всегда можем на сеточном уровне перейти от задачи с неоднородными граничными условиями к сеточной задаче с однородными граничными условиями.

Для применения метода Фурье для решения этой двумерной задачи рассмотрим задачу на собственные значения для разностного оператора второй производной по переменной  $x_1$ :

$$\begin{aligned} v_{\bar{x}_1 x_1} + \lambda v &= 0, \quad x_1 \in \omega_1, \\ v_0 &= 0, \quad v_{N_1} = 0. \end{aligned}$$

Соответствующие собственные значения и собственные функции обозначим  $\lambda_k, v^{(k)}(x_1), k = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k\pi h_1}{2l_1}, \\ v^{(k)}(x_1) &= \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{k\pi x_1}{l_1}, \quad k = 1, 2, \dots, N_1 - 1. \end{aligned}$$

Будем искать приближенное решение задачи (3.18), (3.19) в виде разложения:

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_1-1} c^{(k)}(x_2) v^{(k)}(x_1), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \omega. \quad (3.20)$$

Пусть  $\varphi^{(k)}(x_2)$  — коэффициенты Фурье правой части:

$$\varphi^{(k)}(x_2) = \sum_{k=1}^{N_1-1} \varphi(\mathbf{x}) v^{(k)}(x_1) h_1. \quad (3.21)$$

Для определения  $c^{(k)}(x_2)$  получим трехточечные задачи:

$$c_{\bar{x}_2 x_2}^{(k)} - \lambda c^{(k)} = \varphi^{(k)}(x_2), \quad x_2 \in \omega_2, \quad (3.22)$$

$$c_0^{(k)} = 0, \quad c_{N_2}^{(k)} = 0. \quad (3.23)$$

Разностная задача (3.22), (3.23) при каждом  $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1$  решается методом прогонки.

Таким образом метод Фурье основан на определении собственных функций и собственных значений одномерной сеточной задачи, вычислении коэффициентов Фурье правой части согласно (3.21), решении задач (3.22), (3.23) для коэффициентов разложения и, наконец, решение задачи определяется по формулам суммирования (3.20).

Эффективные вычислительные алгоритмы метода разделения переменных связаны с быстрым преобразованием Фурье (FFT). В этом случае можно вычислить коэффициенты Фурье правой части и восстановить решение при затратах  $Q = O(N_1 N_1 \log N_1)$ . Для задач с постоянными коэффициентами можно использовать преобразование Фурье по обоим переменным (разложение по собственным функциям двумерного сеточного оператора).

### 3.3.2. Итерационные методы

Для приближенного решения многомерных сеточных эллиптических задач с переменными коэффициентами используются итерационные методы. Определим основные понятия теории итерационных методов решения систем линейных уравнений.

В конечномерном вещественном гильбертовом пространстве  $H$  ищется функция  $y \in H$  как решение операторного уравнения

$$Ay = \varphi. \quad (3.24)$$

Здесь  $A$  рассматривается как линейный положительный оператор, действующий в  $H$ , а  $\varphi$  — заданный элемент  $H$ .

**Итерационный метод** основан на том, что начиная с некоторого начального приближения  $y_0 \in H$  последовательно определяются приближенные решения  $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$  уравнения (3.24), где  $k$  — номер итерации. Значения  $y_{k+1}$  определяются по ранее найденным  $y_k, y_{k-1}, \dots$ . Если при вычислении  $y_{k+1}$  используются значения на предыдущей итерации  $y_k$ , то итерационный метод называется одношаговым (**двухслойным**). Соответственно при использовании  $y_k$  и  $y_{k-1}$  итерационный метод называется двухшаговым (**трехслойным**).

Любой двухслойный итерационный метод можно записать в виде

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.25)$$

В теории разностных схем (3.25) есть **каноническая форма двухслойного итерационного метода**. При заданном  $y_0$  все последующие приближения находятся по (3.25). При такой записи итерационного метода явно прослеживается его связь с разностными схемами приближенного решения нестационарных задач.

Для характеристики точности приближенного решения естественно ввести погрешность  $z_k = y_k - y$ . Будем рассматривать сходимость итерационного метода в энергетическом пространстве  $H_D$ , порожденном самосопряженным и положительно определенным в  $H$  оператором  $D$ . В  $H_D$  скалярное произведение и норма есть

$$(y, w)_D = (Dy, w), \quad \|y\|_D = ((y, y)_D)^{1/2}.$$

Итерационный метод сходится в  $H_D$ , если  $\|z_k\|_D \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . В качестве меры сходимости итераций принимают относительную погрешность  $\varepsilon$ , так что на  $n$ -й итерации

$$\|y_n - y\|_D \leq \varepsilon \|y_0 - y\|_D. \quad (3.26)$$

В силу того, что само точное решение  $y$  неизвестно, оценка точности приближенного решения проводится по невязке

$$r_k = Ay_k - \varphi = Ay_k - Ay,$$

которая может быть вычислена непосредственно. Например, итерационный процесс проводится до выполнения оценки

$$\|r_n\| \leq \varepsilon \|r_0\|. \quad (3.27)$$

Использование критерия сходимости (3.27) соответствует выбору  $D = A^*A$  в (3.26). Минимальное число итераций, которое гарантирует точность  $\varepsilon$  (выполнение (3.26) или (3.27)), обозначим  $n(\varepsilon)$ .

При построении итерационного метода мы должны стремиться к минимизации вычислительной работы по нахождению приближенного решения задачи (3.24) с заданной точностью. Пусть  $Q_k$  — число арифметических действий для нахождения приближения  $y_k$  и пусть делается  $n \geq n(\varepsilon)$  итераций. Тогда общие затраты оцениваются величиной

$$Q(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n Q_k.$$

Применительно к двухслойному итерационному методу (3.25) минимизация  $Q(\varepsilon)$  может достигаться за счет выбора операторов  $B_k$  и итерационных параметров  $\tau_{k+1}$ . Обычно операторы  $B_k$  задаются из тех или иных соображений, а оптимизация итерационного метода (3.25) осуществляется за счет выбора итерационных параметров.

В теории итерационных методов для выбора итерационных параметров получили распространение два подхода. Первый из них связан с использованием априорной информации об операторах итерационной схемы ( $B_k$  и  $A$  в (3.25)). Во втором подходе (итерационные методы вариационного типа) итерационные параметры находятся на каждой итерации



из минимума некоторых функционалов, при этом явно не используется априорная информация об операторах. Вначале мы остановимся на общем описании итерационных методов без указания структуры сеточных операторов  $B_k$ .

Будем рассматривать в качестве основной задачу (3.24), когда оператор  $A$  самосопряжен и положительно определен ( $A = A^* > 0$ ) в конечномерном гильбертовом пространстве  $H$ . Исследуется итерационный процесс

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.28)$$

т. е. в отличие от общего случая (3.25) оператор  $B$  считается постоянным (не изменяется в процессе итераций).

### 3.3.3. Примеры двухслойных итерационных методов

Метод простой итерации соответствует использованию в (3.28) постоянного итерационного параметра  $\tau_{k+1} = \tau$ , т. е. рассматривается итерационный процесс

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.29)$$

в предположении, что

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0. \quad (3.30)$$

Итерационный метод (3.29) называется **стационарным**.

Пусть априорная информация об операторах  $B$  и  $A$  задана в виде двухстороннего операторного неравенства

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \quad (3.31)$$

т. е. операторы  $B$  и  $A$  энергетически эквивалентны с постоянными энергетической эквивалентности  $\gamma_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Имеет место следующее основное утверждение о скорости сходимости рассматриваемого итерационного метода.

**Теорема 3.3.** *Итерационный метод (3.29)–(3.31) сходится в  $H_D$ ,  $D = A, B$  при  $0 < \tau < 2/\gamma_2$ . Оптимальным значением итерационного параметра является*

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (3.32)$$

при котором для числа итераций  $n$ , необходимых для достижения точности  $\varepsilon$ , справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0}, \quad (3.33)$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Заметим, что в (3.33)  $n_0(\varepsilon)$ , вообще говоря, нецелое и  $n$  — минимальное целое, при котором выполнено  $n \geq n_0(\varepsilon)$ . Теорема 3.3 указывает путь оптимизации сходимости итерационного процесса (3.29), (3.30) за счет выбора оператора  $B$  в соответствии с (3.31), т. е. оператор  $B$  должен быть близок оператору  $A$  по энергии.

Оптимальный набор итерационных параметров в (3.28) связан с корнями полиномов Чебышева, поэтому такой итерационный метод называется **чебышевским итерационным методом** (методом Ричардсона). Определим множество  $\mathcal{M}_n$  следующим образом:

$$\mathcal{M}_n = \left\{ -\cos \left( \frac{2i-1}{2n} \pi \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (3.34)$$

Для итерационных параметров  $\tau_k$  используется формула

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}_n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.35)$$

Имеет место следующее основное утверждение о скорости сходимости итерационного метода с чебышевским набором итерационных параметров.

**Теорема 3.4.** *Чебышевский итерационный метод (3.28), (3.30), (3.31), (3.34), (3.35) сходится в  $H_D$ ,  $D = A, B$ , и для числа итераций  $n$ , необходимых для достижения точности  $\varepsilon$ , справедлива оценка*

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2\varepsilon^{-1})}{\ln \rho_1^{-1}}, \quad (3.36)$$

где

$$\rho_1 = \frac{1 - \xi^{1/2}}{1 + \xi^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

В чебышевском методе расчет итерационных параметров осуществляется (см. (3.34), (3.35)) по заданному общему числу итераций  $n$ . Естественно, что вырожденный случай  $n = 1$  соответствует рассмотренному выше методу простой итерации. Практическая реализация чебышевского итерационного метода связана с проблемой вычислительной устойчивости. Это обусловлено тем, что норма оператора перехода на отдельных итерациях больше единицы, и может происходить рост локальной погрешности до переполнения (машинная бесконечность). Проблема вычислительной устойчивости решается специальным упорядочиванием

итерационных параметров (выбором  $\mu_k$  из множества  $M_n$ ). Для вычисления оптимальных последовательностей итерационных параметров  $\tau_k$  по заданному числу итераций  $n$  имеются различные алгоритмы.

Можно отметить также широко используемый в вычислительной практике трехслойный вариант чебышевского итерационного метода, в котором итерационные параметры рассчитываются по рекуррентным формулам. При этом достигается монотонное убывание погрешности и нет необходимости заранее выбирать общее число итераций  $n$ , как при использовании (3.34), (3.35).

### 3.3.4. Итерационные методы вариационного типа

Выше рассматривались итерационные методы решения задачи (3.24) в условиях, когда задана априорная информация об операторах  $B$  и  $A$  в виде констант (см. (3.31)) энергетической эквивалентности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Через эти постоянные определяются оптимальные значения итерационных параметров (см. (3.32), (3.35)). Получение этих постоянных может оказаться сложной задачей, поэтому есть смысл пытаться строить итерационные методы, для которых итерационные параметры вычисляются без такой априорной информации. Этот класс методов известен как **итерационные методы вариационного типа**. Начнем с рассмотрения двухслойного итерационного метода (3.28) в предположении (3.30).

Обозначая невязку  $r_k = Ay_k - \varphi$  и поправку  $w_k = B^{-1}r_k$ , итерационный процесс (3.28) запишем следующим образом:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}w_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Естественно выбирать итерационный параметр  $\tau_{k+1}$  из условия минимума нормы погрешности  $z_{k+1}$  в  $H_D$ . Непосредственные вычисления показывают, что минимум нормы достигается при выборе

$$\tau_{k+1} = \frac{(Dw_k, z_k)}{(Dw_k, w_k)}. \quad (3.37)$$

Конкретизация итерационного метода достигается за счет выбора оператора  $D = D^* > 0$ . Этот выбор должен быть подчинен, в частности, условию возможности вычисления итерационных параметров. В формулу (3.37) входит невычисляемая величина  $z_k$ , и поэтому простейший выбор  $D = B$  (см. теорему 3.3) здесь не проходит. Вторая отмеченная выше возможность  $D = A$  приводит нас к **итерационному методу скорейшего спуска**, когда

$$\tau_{k+1} = \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}. \quad (3.38)$$

Среди других возможностей выбора  $D$  отметим случай  $D = AB^{-1}A$  — метод минимальных поправок, когда

$$\tau_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}.$$

Двухслойный итерационный метод вариационного типа сходится не медленнее метода простой итерации. Сформулируем соответствующий результат применительно к методу скорейшего спуска.

**Теорема 3.5.** *Итерационный метод (3.28), (3.30), (3.31), (3.38) сходится в  $H_A$ , и для числа итераций  $n$ , необходимых для достижения точности  $\varepsilon$ , справедлива оценка (3.33).*

В вычислительной практике наибольшее распространение получили трехслойные итерационные методы вариационного типа. По скорости сходимости они не хуже итерационного метода с чебышевским набором итерационных параметров.

В трехслойном (двухшаговом) итерационном методе новое приближение находится по двум предыдущим. Для реализации метода требуются два начальных приближения  $y_0, y_1$ . Обычно  $y_0$  задается произвольно, а  $y_1$  находится по двухслойному итерационному методу. Трехслойный метод записывается в следующей канонической форме трехслойного итерационного метода:

$$\begin{aligned} By_{k+1} &= \alpha_{k+1}(B - \tau_{k+1}A)y_k + (1 - \alpha_{k+1})By_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}\varphi, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, \\ By_1 &= (B - \tau_1A)y_0 + \tau_1\varphi, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где  $\alpha_{k+1}$  и  $\tau_{k+1}$  — итерационные параметры.

Вычисления по (3.39) основаны на представлении

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}y_k + (1 - \alpha_{k+1})y_{k-1} - \alpha_{k+1}\tau_{k+1}w_k,$$

где, напомним,  $w_k = B^{-1}r_k$ .

В методе сопряженных градиентов для расчета итерационных параметров трехслойного итерационного метода (3.39) используются формулы

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \alpha_{k+1} &= \left( 1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(w_k, r_k)}{(w_{k-1}, r_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha_1 = 1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Метод сопряженных градиентов в настоящее время наиболее широко используется в вычислительной практике.

**Теорема 3.6.** *Метод сопряженных градиентов (3.39), (3.40) при выполнении (3.30), (3.31) сходится в  $H_A$ , и для числа итераций  $n$ , необходимых для достижения точности  $\epsilon$ , справедлива оценка (3.36).*

Мы привели некоторый материал справочного характера относительно итерационных методов решения задачи (3.24) в случае самосопряженных операторов  $A$  и  $B$  (условия (3.30)). Во многих прикладных проблемах приходится рассматривать более общие задачи с несамосопряженными операторами. Типичным примером являются задачи конвекции-диффузии в механике сплошной среды.

### 3.3.5. Итерационные методы с диагональным переобуславливателем

Второй основной вопрос теории итерационных методов связан с выбором **переобуславливателя** — оператора  $B$  в (3.28). Мы отметим некоторые основные возможности в этом направлении. Здесь мы не будем рассматривать общие задачи (3.24) с несамосопряженным оператором, отсылая читателя к специальной литературе.

Простейший класс итерационных методов решения задачи (3.24) связан с выбором диагонального оператора  $B$ . В этом случае

$$B = b(x) E \quad (3.41)$$

и расчет нового итерационного приближения проводится по явным формулам. К этому классу методов принадлежит и **итерационный метод Якоби**, который соответствует выбору в качестве  $B$  диагональной части оператора  $A$  и  $\tau_k = \tau = 1$ .

Задача оптимального выбора  $B$  в классе операторов (3.41) решена. Отношение  $\xi = \gamma_1/\gamma_2$  в двухстороннем операторном неравенстве (3.31) для  $A = A^* > 0$  будет максимальным, если в качестве  $B$  выбрать диагональную часть оператора  $A$ . И в этом смысле метод Якоби является оптимальным.

Оценка эффективности используемого итерационного метода определяется конкретизацией постоянных энергетической эквивалентности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Проиллюстрируем этот момент на примере решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона (3.18), (3.19).

На основании лемм 3.1, 3.2 имеем

$$\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}, \quad \gamma_2 = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}. \quad (3.42)$$

Для рассматриваемой задачи

$$b(\mathbf{x}) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \quad (3.43)$$

и поэтому

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Для числа итераций метода простой итерации с оптимальным значением  $\tau = \tau_0 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$  и метода скорейшего спуска при выборе  $B$  согласно (3.41), (3.43) с учетом (3.33), (3.42) справедлива оценка

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{|h|^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.44)$$

Тем самым, число итераций пропорционально общему числу узлов (неизвестных).

Для чебышевского итерационного метода и метода сопряженных градиентов вместо (3.44) имеем следующую оценку:

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{|h|} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.45)$$

По сравнению с методом простой итерации метод с чебышевским набором итерационных параметров сходится значительно быстрее.

### 3.3.6. Попеременно-треугольные итерационные методы

Рассмотрим задачу (3.24) в условиях, когда самосопряженный и положительный оператор  $A$  представляется в виде

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_2^*. \quad (3.46)$$

Пусть оператор  $D$  соответствует диагональной части  $A$ ,  $L$  — нижней треугольной матрице. Тогда в силу  $A = L + D + L^*$  для операторов  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , из разложения (3.46) получим

$$A_1 = \frac{1}{2}D + L, \quad A_2 = \frac{1}{2}D + L^*. \quad (3.47)$$

Для модельной задачи (3.18), (3.19)

$$Dy = d(\mathbf{x}) E, \quad d(\mathbf{x}) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}. \quad (3.48)$$

Для операторов  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , разложения (3.46), (3.47) имеем следующие представления на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль

на  $\gamma_h$ :

$$A_1 y = \frac{1}{h_1} y_{\bar{x}_1} + \frac{1}{h_2} y_{\bar{x}_2}, \quad A_2 y = -\frac{1}{h_1} y_{x_1} - \frac{1}{h_2} y_{x_2}. \quad (3.49)$$

Оператор  $B$  в попеременно-треугольном итерационном методе является **факторизованным** и выбирается в виде произведения двух треугольных и диагональной матриц:

$$B = (D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2), \quad (3.50)$$

где  $\omega$  — числовой параметр.

Скорость сходимости итерационного метода (3.29), (3.30), (3.50) определяется постоянными энергетической эквивалентности  $\gamma_1, \gamma_2$  в двухстороннем неравенстве (3.31). Найдем эти постоянные при априорной информации в виде неравенств

$$\delta_1 D \leq A, \quad A_1 D^{-1} A_2 \leq \frac{\delta_2}{4} A, \quad \delta_1 > 0. \quad (3.51)$$

Для оператора  $B$  имеем

$$\begin{aligned} B &= (D + \omega A_1) D^{-1} (D + \omega A_2) = \\ &= D + \omega (A_1 + A_2) + \omega^2 A_1 D^{-1} A_2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Принимая во внимание (3.51), получим

$$B \leq \left( \frac{1}{\delta_1} + \omega + \omega^2 \frac{\delta_2}{4} \right) A.$$

Тем самым для  $\gamma_1$  имеет место выражение

$$\gamma_1 = \frac{\delta_1}{1 + \omega\delta + \omega^2\delta_1\delta_2/4}. \quad (3.53)$$

Для получения постоянной  $\gamma_2$  представим оператор  $B$  на основании (3.52) в следующем виде:

$$\begin{aligned} B &= D - \omega (A_1 + A_2) + \omega^2 A_1 D^{-1} A_2 + 2\omega (A_1 + A_2) = \\ &= (D - \omega A_1) D^{-1} (D - \omega A_2) + 2\omega A. \end{aligned}$$

Так как оператор  $D$  положителен, то отсюда получаем  $(By, y) \geq 2\omega (Ay, y)$ , т. е.  $A \leq \gamma_2 B$ , где

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\omega}. \quad (3.54)$$

Сейчас мы можем выбрать параметр  $\omega$  в (3.50) исходя из условия максимума  $\xi = \xi(\omega) = \gamma_1/\gamma_2$ . С учетом (3.53), (3.54) получим

$$\xi(\omega) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\omega\delta_1}{1 + \omega\delta + \omega^2\delta_1\delta_2/4}.$$

Максимум  $\xi(\omega)$  достигается при

$$\omega = \omega_0 = 2(\delta_1 \delta_2)^{-1/2}, \quad (3.55)$$

и он равен

$$\xi = \xi(\omega_0) = \frac{2\eta^{1/2}}{1 + \eta^{1/2}}, \quad \eta = \frac{\delta_1}{\delta_2}. \quad (3.56)$$

На основании полученных оценок можно сформулировать соответствующий результат о сходимости попеременно-треугольного итерационного метода при оптимальном выборе параметра  $\omega$ .

**Теорема 3.7.** *Попеременно-треугольный итерационный метод (3.29), (3.46), (3.50), (3.51), (3.55) с чебышевским набором итерационных параметров сходится в  $H_A$  и  $H_B$ , причем для числа итераций справедлива оценка (3.36), где  $\xi$  определяется согласно (3.56).*

**Замечание 1.** Учитывая малость  $\eta$ , для числа итераций можно получить более простое выражение:

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2\varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}\eta^{1/4}}, \quad \eta = \frac{\delta_1}{\delta_2}. \quad (3.57)$$

**Замечание 2.** Попеременно-треугольный метод может реализовываться и в варианте метода сопряженных градиентов. И в этом случае число итераций характеризуется оценкой (3.57).

Найдем теперь постоянные  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в неравенствах (3.51) для модельной задачи (3.18), (3.19). На основе выбора (3.48) и оценок (3.42), (3.43) имеем  $\delta_1 = O(|h|^2)$ . Принимая во внимание (3.48), (3.49), получаем

$$(A_1 D^{-1} A_2 y, y) = \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} (A_2 y, A_2 y).$$

Для правой части имеем

$$(A_2 y, A_2 y) = \frac{1}{h_1^2} (y_{x_1}^2, 1) - \frac{2}{h_1 h_2} (y_{x_1}, y_{x_2}) + \frac{1}{h_2^2} (y_{x_2}^2, 1).$$

Принимая во внимание, что

$$-\frac{2}{h_1 h_2} (y_{x_1}, y_{x_2}) = -2 \left( \frac{1}{h_2} y_{x_1}, \frac{1}{h_1} y_{x_2} \right) \leq \frac{1}{h_2^2} (y_{x_1}^2, 1) + \frac{1}{h_1^2} (y_{x_2}^2, 1),$$

получаем

$$(A_2 y, A_2 y) \leq \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) (A y, y).$$



Тем самым приходим к неравенству  $(A_1 D^{-1} A_2 y, y) \leq 0,5(Ay, y)$ . Сопоставляя со вторым неравенством (3.51), имеем  $\delta_2 = 2$ .

С учетом этого для чебышевского итерационного метода верна оценка числа итераций

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{|h|^{1/2}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.58)$$

Таким образом, число итераций пропорционально корню квадратному из числа узлов по одному направлению (в нашей двумерной задаче — корню четвертой степени из общего числа узлов). Оценка (3.58) показывает, что рассмотренный метод значительно предпочтительнее отмеченного выше метода Якоби.

Параметр  $\omega$  в попеременно-треугольном методе (3.29), (3.50) можно включить в оператор  $D$  и использовать (3.29) с  $B = (D + A_1) D^{-1} (D + A_2)$ . Оптимизация итерационного метода достигается только за счет выбора оператора  $D$ . Это особенно важно при рассмотрении задач с переменными коэффициентами. Заслуживает внимания попеременно-треугольный итерационный метод в форме

$$B = (D + L) D^{-1} (D + L^*). \quad (3.59)$$

Если в качестве  $D$  взять  $\theta D$ , где  $\theta$  — постоянная, а  $D$  — диагональная часть  $A$ , то выбор переобуславливателя в форме (3.59) эквивалентен ранее рассмотренному выбору. Конечно, если  $D \neq \theta D$ , то эквивалентности между этими вариантами попеременно-треугольного итерационного метода уже нет.

## 3.4. Программная реализация и примеры расчетов

Рассматривается модельная задача Дирихле в прямоугольнике для самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Для ее приближенного решения используется попеременно-треугольный итерационный метод приближенной факторизации. Представлена программа и приведены результаты расчетов.

### 3.4.1. Постановка задачи и разностная схема

В прямоугольнике

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

решается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.60)$$

$$u(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.61)$$

Будем считать, что

$$k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0, \quad q(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

В  $\Omega$  введем равномерную по каждому направлению сетку с шагами  $h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Определим множество внутренних узлов сетки

$$\omega = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \alpha = 1, 2 \}$$

и пусть  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Дифференциальной задаче (3.60), (3.61) поставим в соответствие разностную задачу

$$- (a^{(1)} y_{\bar{x}_1})_{x_1} - (a^{(2)} y_{\bar{x}_2})_{x_2} + c(\mathbf{x})y = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad (3.62)$$

$$y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega. \quad (3.63)$$

Коэффициенты и правая часть в (3.62) определяются по простейшим формулам

$$a^{(1)}(\mathbf{x}) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \quad a^{(2)}(\mathbf{x}) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2),$$

$$c(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

При необходимости используются более сложные выражения.

### 3.4.2. Подпрограмма для решения сеточных уравнений

Мы начнем с краткого описания подпрограммы SBAND5, которая предназначена для решения системы линейных уравнений с симметричной пятидиагональной матрицей. Эта подпрограмма и ее описание подготовлены М. М. Макаровым<sup>1)</sup>.

**Назначение подпрограммы.** Подпрограмма SBAND5 предназначена для приближенного решения системы линейных уравнений с невырожденной симметричной матрицей специального вида: ненулевые элементы матрицы содержатся лишь на пяти ее диагоналях: главной, двух соседних с главной и двух удаленных, расположенных симметрично относительно главной диагонали. Матрица указанного вида является частным случаем ленточной симметричной матрицы (нижняя полуширина ленты равна верхней полуширине и равна расстоянию между главной и любой из удаленных диагоналями).

<sup>1)</sup> Более ранняя версия подпрограммы (SOLVE1) описана в книге *Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. Computational Heat Transfer. Vol 2. The Finite Difference Methodology* Chichester, Wiley, 1995.

**Краткие сведения о методе решения.** В подпрограмме SBAND5 реализован неявный итерационный метод сопряженных градиентов. Итерационная схема строится из условия минимизации погрешности  $k$ -го приближения в энергетической норме при линейном уточнении итерационного приближения на вектор коррекции из подпространства Крылова размерности  $k$ . Для определения вектора коррекции и последующего итерационного уточнения на каждой итерации вычисляются два итерационных параметра, которые выражаются через скалярные произведения итерационных векторов. Метод является неявным в том смысле, что на каждой итерации необходимо решить систему линейных уравнений с матрицей (называемой переобуславливателем), близкой в некотором смысле к исходной матрице системы и фактически по ней построенной. В силу специального выбора переобуславливателя, в подпрограмме реализован алгоритм, не содержащий операции умножения исходной матрицы на вектор (которая, вообще говоря, выполняется в неявных методах наряду с обращением матрицы-переобуславливателя). Для симметричных и положительно определенных матриц системы и переобуславливателя метод сходится в энергетическом пространстве.

**Алгебраическая формулировка задачи и сеточная интерпретация.** Для пятидиагональной симметричной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  введем обозначения:

- A0 — элементы главной диагонали, упорядоченные по возрастанию строчного индекса;
- A1R — элементы правой диагонали, соседней с главной, взятые с обратным знаком;
- A2R — элементы правой удаленной диагонали с обратным знаком.

Приняв соглашение, что в записи уравнений системы

$$Ay = f$$

отсутствуют элементы диагоналей A0, A1R, A2R, выходящие за пределы матрицы, и компоненты вектора  $y$ , на которые они умножаются, каждое уравнение системы представим в виде

$$-A2R_{j-l}y_{j-l} - A1R_{j-1}y_{j-1} + A0_j y_j - A1R_j y_{j+1} - A2R_j y_{j+1} = f_j, \\ j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $l$  — полуширина ленты матрицы.

Системы с подобными матрицами возникают, например, при аппроксимации дифференциальных эллиптических уравнений в частных производных на пятиточечном шаблоне сетки в ортогональных системах координат. Если узлы сетки в объемлющем сеточном прямоугольнике упорядочены по горизонтальным линиям снизу вверх, а в каждой линии — слева направо, то при числе узлов на каждой линии  $l$  элементы

$-A2R_{j-1}$ ,  $-A1R_{j-1}$ ,  $A0_j$ ,  $-A1R_j$  и  $-A2R_j$  суть коэффициенты разностного уравнения  $j$ -го узла при компонентах сеточной функции соответственно в нижнем, левом, центральном, правом и верхнем узлах пятиточечного шаблона.

**Замечание 1.** Расчетная область не обязательно должна быть прямоугольником в соответствующей системе координат, однако для использования подпрограммы SBAND5 при написании разностной схемы в объемлющем сеточном прямоугольнике во всех фиктивных узлах должны быть заданы сеточные уравнения со значениями коэффициентов

$$A0_j = 1, \quad A1R_j = A2R_j = 0,$$

а в качестве соответствующих компонент начального приближения и правой части должны быть переданы нулевые значения.

**Замечание 2.** При интерпретации уравнений системы как сеточных кажется естественным, что в узлах сетки на границе сеточного прямоугольника некоторые коэффициенты должны быть нулевыми: например, коэффициенты  $A1R_j$  в узлах на правой границе. Именно по причине такой «естественности» настоящее примечание обращает внимание пользователей на то, что подпрограмма SBAND5 не заносит нули ни в какие элементы входного массива коэффициентов, если они соответствуют элементам диагоналей, не выходящим за пределы матрицы. В соответствии с принятой в SBAND5 структурой данных, во входном массиве могут присутствовать элементы диагоналей вне пределов матрицы. Такое допущение упрощает процесс задания входной информации, поскольку позволяет считать все узлы сетки внутренними и все диагонали имеющими одинаковую длину. В эти «лишние» компоненты диагоналей могут быть занесены любые значения, так как в SBAND5 они обнуляются.

**Замечание 3.** Все элементы матрицы вне главной диагонали передаются в подпрограмму SBAND5 с обратным знаком, при этом элементы на главной диагонали должны быть положительными.

**Описание параметров подпрограммы.** Заголовок подпрограммы SBAND5 имеет вид:

```
SUBROUTINE SBAND5 ( N, L, A, Y, F, EPSR, EPSA )
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  DIMENSION A(1), Y(N), F(N)
  COMMON / SB5 / IDEFAULT, I1R, I2R, IFREE
  COMMON / CONTROL / IREP, NITER
```

**Формальные параметры подпрограммы SBAND5:**

$N$  — число уравнений системы,  $N > 2$ ;

- L — полуширина ленты,  $1 < L < N$  (полуширина ленты определяется для ленточной матрицы симметричной структуры как максимальное число элементов в строках матрицы между элементом на главной диагонали и наиболее удаленным от нее ненулевым элементом, включая последний и исключая первый);
- A — массив, который на входе должен содержать коэффициенты  $A_0$ ,  $A_{1R}$ ,  $A_{2R}$ , и который должен иметь достаточную длину для размещения в нем векторов, вычисляемых и хранимых на итерациях (о способах задания входной информации и об оценках требуемой длины см. ниже);
- Y — массив длины не менее  $N$ , содержащий на входе в первых  $N$  компонентах начальное приближение, а на выходе на его месте — итоговое итерационное приближение;
- F — массив длины не менее  $N$ , содержащий на входе в первых  $N$  компонентах вектор правой части системы;
- EPSR — требуемая относительная точность итерационного приближения к решению, используется в SBAND5 в критерии окончания итерационного процесса с использованием отношения значений некоторой нормы начальной и текущей погрешностей;
- EPSA — требуемая абсолютная точность итерационного приближения к решению, используется в критерии окончания итерационного процесса с использованием значения некоторой нормы текущей погрешности.

Все параметры являются входными. Параметр Y является также и выходным. Значения  $N$ ,  $L$ , EPSR, EPSA на выходе не изменяются, а значения A и F на выходе не определены.

*Параметры общего блока / SB5 / подпрограммы SBAND5:*

- IDEFAULT — входной параметр, сообщающий признак необходимости анализа остальных значений общего блока / SB5 /: при нулевом значении все оставшиеся параметры общего блока можно не задавать, так как их значения будут игнорированы в подпрограмме SBAND5, при любом другом значении все параметры общего блока должны быть заданы;
- I1R — указатель расположения коэффициентов  $A_{1R}$  в массиве A (описание дано ниже);
- I2R — указатель расположения коэффициентов  $A_{2R}$  в массиве A;
- IFREE — указатель расположения свободного участка в массиве A.

Параметры общего блока / SB5 / описывают способ задания коэффициентов системы во входном массиве А. Задание IDEFAULT = 0 указывает на то, что порядок расположения коэффициентов в массиве соответствует принятому в подпрограмме SBAND5. В ином случае, расположение коэффициентов должно быть описано параметрами общего блока / SB5 /.

*Параметры общего блока / CONTROL / подпрограммы SBAND5:*

IREPT — признак необходимости выполнить действия, которые предусмотрены в случае первого обращения к подпрограмме SBAND5 с данной матрицей;

пользователь должен задать значение IREPT = 0 при первом обращении с данной матрицей, при этом в подпрограмме SBAND5 присваивается значение IREPT = 1;

для решения системы с той же матрицей, но иной правой частью пользователь должен обратиться к SBAND5, задав новые значения Y, F и сохранив значение A;

NITER — на выходе число итераций.

**Описание структур данных и оценка требуемой памяти.** Организация структуры данных в подпрограмме SBAND5 подчинена концепции «сквозного» программирования всех операций, включающих действия с матрицами и векторами. Эта концепция заключается в возможности программирования любой операции в одном цикле, без специального рассмотрения компонент векторов и матриц, соответствующих «неполным» строкам матрицы (в нашем случае, L первым и L последним строкам, в которых, в свою очередь, специального рассмотрения могли бы потребовать первая и последняя строки). В интерпретации разностных уравнений на сетке это означает рассмотрение всех узлов сетки как внутренних. Применение такой концепции делает сжатым и наглядным код программы, в котором каждому циклу соответствует линейная или матричная операция численного алгоритма.

При изложении порядка задания коэффициентов во входном массиве А будет указано, в какие компоненты подпрограмма SBAND5 заносит нулевые значения. Использование общего блока / SB5 / предоставляет пользователю определенную свободу в задании коэффициентов. Необходимо, чтобы коэффициенты были занесены поддиагонально при одном и том же способе упорядочения. Необходимо обеспечить также, чтобы при занесении нулей подпрограмма не изменила значений других диагоналей в пределах матрицы.

Задав на входе IDEFAULT = 0, пользователь может не задавать остальные значения общего блока / SB5 /. В этом случае массив А должен содержать на входе в первых 3\*N компонентах следующие значения:

$A(I)$ ,  $I = 1, 2, \dots, N$  — коэффициенты  $A_0$ ;

$A(I1R+I)$ ,  $I1R = N$ ,  $I = 1, 2, \dots, N-1$  — коэффициенты  $A1R$  в пределах матрицы, выполняется присваивание  $A(I1R+N) = 0$ ;

$A(I2R+I)$ ,  $I2R = 2*N$ ,  $I = 1, 2, \dots, N-L$  — коэффициенты  $A2R$  в пределах матрицы, выполняется присваивание  $A(I2R+I) = 0$ ,  $I = N-L+1, N-L+2, \dots, N$ .

Коэффициенты  $A_0$  всегда должны находиться в первых компонентах массива  $A$ . Коэффициенты остальных диагоналей могут быть заданы в любых компонентах массива  $A$ . В этом случае необходимо при обращении задать `IDEFAULT` равным ненулевому значению, задать значения указателей  $I1R$ ,  $I2R$ , а также значение указателя `IFREE` такое, что  $3*N+2*L$  компонент массива  $A$ , начиная с  $(IFREE+1)$ -ой, считаются свободными и могут быть использованы в подпрограмме `SBAND5` для хранения итерационных векторов.

**Замечание 4.** При задании указателя `IFREE` не приведет к ошибке распределение памяти такое, что в компоненты матрицы за `IFREE`-ой компонентой будут занесены нулевые значения (например, если диагональ  $A2R$  расположена последней и задано значение `IFREE = I2R+N-L`).

Минимально необходимая длина массива  $A$  оценивается следующим образом. При использовании схемы расположения коэффициентов, принятой в подпрограмме `SBAND5`, длина должна быть не менее  $6*N+L$ . При других схемах расположения коэффициентов необходимо  $3*N+2*L+1$  компонент вслед за компонентами, занятыми коэффициентами.

**Пример использования подпрограммы `SBAND5`.** В программе `EXSB5` задаются коэффициенты матрицы системы размера  $10 \times 10$  с полушириной ленты равной 5, нулевое начальное приближение и правая часть системы. Производится обращение к подпрограмме `SBAND5` для решения системы и полученное приближенное решение выводится на печать (вместе с протоколом итерационного процесса — указанием достигнутой относительной точности на текущей итерации).

```

PROGRAM EXSB5
C
C   EXSB5 - ПРИМЕР ОБРАЩЕНИЯ К ПОДПРОГРАММЕ SBAND5
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C   МАТРИЦА СИСТЕМЫ, ВЕКТОРЫ РЕШЕНИЯ И ПРАВОЙ ЧАСТИ ИМЕЮТ ВИД:
C
C   ( 6 -1           -2           )   ( 1 )   ( -8 )
C   ( -1 6  -1           -2           )   ( 2 )   ( -6 )
C   (   -1 6  -1           -2           )   ( 3 )   ( -4 )
C   (           -1 6  -1           -2           )   ( 4 )   ( -2 )

```

```

C      (      -1  6  -1      -2 ) ( 5 ) ( 0 )
C      ( -2      -1  6  -1      ) * ( 6 ) = ( 22 )
C      (      -2      -1  6  -1      ) ( 7 ) ( 24 )
C      (      -2      -1  6  -1      ) ( 8 ) ( 26 )
C      (      -2      -1  6  -1      ) ( 9 ) ( 28 )
C      (      -2      -1  6  ) ( 10 ) ( 41 )
C
C      PARAMETER ( N = 10, L = 5 )
C      DIMENSION A(6*N+L), Y(N), F(N)
C      COMMON / SB5 / IDEFAULT(4)
C      COMMON / CONTROL / IREPT, NITER
C
C      ЗАДАНИЕ ДИАГОНАЛЕЙ МАТРИЦЫ, НУЛЕВОГО НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ
C      И ПРАВОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ:
C
C      IDEFAULT(1) = 0
C      IREPT      = 0
C      DO 1 I = 1, 10
C          A(I)      = 6.DO
C          A(N+I)    = 1.DO
C          A(2*N+I)  = 2.DO
C          Y(I)      = 0.DO
C 1 CONTINUE
C      F(1) = -8.DO
C      F(2) = -6.DO
C      F(3) = -4.DO
C      F(4) = -2.DO
C      F(5) = 0.DO
C      F(6) = 22.DO
C      F(7) = 24.DO
C      F(8) = 26.DO
C      F(9) = 28.DO
C      F(10) = 41.DO
C
C      ОБРАЩЕНИЕ К ПОДПРОГРАММЕ SBAND5 ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ:
C
C      EPSR = 1.D-6
C      EPSA = 1.D-7
C      CALL SBAND5 ( N, L, A, Y, F, EPSR, EPSA )
C
C      ПЕЧАТЬ ВЕКТОРА РЕШЕНИЯ:
C
C      WRITE (06, * ) ' S O L U T I O N:'
C      DO 2 I = 1, 10
C          WRITE (06, * ) Y(I)
C 2 CONTINUE
C      END

```



Приведем полный текст подпрограммы SBAND5.

Подпрограмма SBAND5

```

SUBROUTINE SBAND5 ( N, L, A, Y, F, EPSR, EPSA )
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  DIMENSION A(1), Y(N), F(N)
C
  COMMON / SB5 / IDEFAULT,
*          I1R, I2R,
*          IFREE
C
  COMMON / CONTROL / IREPT, NITER
C
  IF ( IDEFAULT .EQ. 0 ) THEN
    I1R = N
    I2R = 2*N
    IG = 3*N
  ELSE IF ( IDEFAULT .NE. 0 ) THEN
    IG = IFREE + L
  END IF
C
  IT = IG + N
  ITL = IT + L
  IQ = ITL + N
C
  IF ( IREPT .EQ. 0 ) THEN
C
    A(I1R+N) = 0.DO
    DO 9 J = 1, L
      A(I2R+J+N-L) = 0.DO
      A(IT+J) = 0.DO
    9 CONTINUE
C
    DO 10 J = 1, N
      G = A(J) - A(I1R+J-1)*A(ITL+J-1)
      *   - A(I2R+J-L)*A(ITL+J-L)
      G = 1.DO / G
      A(IG+J) = DSQRT(G)
      A(ITL+J) = G*(A(I1R+J) + A(I2R+J) )
    10 CONTINUE
C
    DO 20 J = 1, N
      A(J) = A(IG+J)*A(J)*A(IG+J) - 2.DO
      A(I1R+J) = A(IG+J)*A(I1R+J)*A(IG+J+1)
      A(I2R+J) = A(IG+J)*A(I2R+J)*A(IG+J+L)
    20 CONTINUE
C
    IREPT = 1
C
  END IF
C

```

```

DO 30 J = N, 1, -1
  A(ITL+J) = Y(J) / A(IG+J)
  Y(J) = A(ITL+J) - A(I1R+J)*A(ITL+J+1) - A(I2R+J)*A(ITL+J+L)
  A(ITL+J-L) = 0.DO
30 CONTINUE
C
  RRO = 0.DO
  DO 40 J = 1,N
    G = A(ITL+J)
    A(ITL+J) = F(J)*A(IG+J) - A(J)*G - Y(J)
  *   + A(I1R+J-1)*A(ITL+J-1) + A(I2R+J-L)*A(ITL+J-L)
    F(J) = A(ITL+J) - G
    RRO = RRO + F(J)*F(J)
40 CONTINUE
C
  NIT = 0
  EPSNIT = 1.DO
  RR = RRO
C
50 CONTINUE
C
  IF ( EPSNIT .GE. EPSR .AND. RR .GE. EPSA ) THEN
C
  IF ( NIT .EQ. 0 ) THEN
    RRI = 1.DO / RR
    DO 60 J = N, 1, -1
      A(IQ+J) = F(J)
      A(ITL+J) = A(IQ+J) + A(I1R+J)*A(ITL+J+1) + A(I2R+J)*A(ITL+J+L)
      A(ITL+J-L) = 0.DO
60 CONTINUE
    ELSE IF ( NIT .GE. 1 ) THEN
      BK = RR*RRI
      RRI = 1.DO / RR
      DO 61 J = N, 1, -1
        A(IQ+J) = F(J) + BK*A(IQ+J)
        A(ITL+J) = A(IQ+J) + A(I1R+J)*A(ITL+J+1) + A(I2R+J)*A(ITL+J+L)
        A(ITL+J-L) = 0.DO
61 CONTINUE
      END IF
C
    TQ = 0.DO
    DO 70 J = 1, N
      G = A(ITL+J)
      A(ITL+J) = A(IQ+J) + A(J)*G + A(I1R+J-1)*A(ITL+J-1)
    *   + A(I2R+J-L)*A(ITL+J-L)
      A(IT+J) = G + A(ITL+J)
      TQ = TQ + A(IT+J)*A(IQ+J)
70 CONTINUE
C
    AK = RR / TQ
C
    RR = 0.DO
C

```

```

DO 80 J = 1,N
  Y(J) = Y(J) + AK*A(IQ+J)
  F(J) = F(J) - AK*A(IT+J)
  RR = RR + F(J)*F(J)
80 CONTINUE
C
  NIT = NIT + 1
  EPSNIT = DSQRT(RR/RR0 )
C
  GO TO 50
C
  END IF
C
DO 90 J = N, 1, -1
  A(ITL+J) = Y(J) + A(I1R+J)*A(ITL+J+1) + A(I2R+J)*A(ITL+J+L)
  Y(J) = A(IG+J)*A(ITL+J)
90 CONTINUE
  NITER = NIT
C
  RETURN
  END

```

### 3.4.3. Программа

Для приближенного решения краевой задачи (3.60), (3.61) используется следующая программа.

#### Программа PROBLEM2

```

C
C   PROBLEM2 - КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
C               С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ  C
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
  PARAMETER ( N1 = 101, N2 = 101 )
C
  DIMENSION A(7*N1*N2), Y(N1,N2), F(N1,N2),
*           VL(N2), BR(N2), VB(N1), VT(N1)
  COMMON / SB5 / IDEFAULT(4)
  COMMON / CONTROL / IREPT, NITER
C
C   ДЛИНА МАССИВА А ДОЛЖНА БЫТЬ ДОСТАТОЧНОЙ ДЛЯ
C   РАЗМЕЩЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ
C   РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ, ЗАДАННОЙ ГЛАВНОЙ А0,
C   СОСЕДНЕЙ ВЕРХНЕЙ А1 И УДАЛЕННОЙ ВЕРХНЕЙ А2
C   ДИАГОНАЛЯМИ, ВЕКТОРОВ РЕШЕНИЯ Y И ПРАВОЙ
C   ЧАСТИ F, А ТАКЖЕ ВЕКТОРОВ, УЧАСТВУЮЩИХ В
C   ИТЕРАЦИОННОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО
C   УРАВНЕНИЯ (СМ. ПОДПРОГРАММУ SBAND5 ).
C

```

```

C      ВВОД ДАННЫХ ЗАДАЧИ:
C
C      X1L, X2L  - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО НИЖНЕГО УГЛА
C                  РАСЧЕТНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ;
C      X1R, X2R  - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО ВЕРХНЕГО УГЛА;
C      X1D, X2D  - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО ВЕРХНЕГО УГЛА
C                  ПОДОБЛАСТИ D2;
C      N1, N2    - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО СООТВЕТСТВУЮЩИМ
C                  НАПРАВЛЕНИЯМ;
C      EPSR      - ТРЕБУЕМАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО
C                  ПРИБЛИЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ;
C      EPSA      - ТРЕБУЕМАЯ АБСОЛЮТНАЯ ТОЧНОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО
C                  ПРИБЛИЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ.
C
C      X1L = 0.DO
C      X1R = 1.DO
C      X2L = 0.DO
C      X2R = 1.DO
C      EPSR = 1.D-6
C      EPSA = 0.DO
C
C      N = N1*N2
C      DO I = 1, 7*N
C          A(I) = 0.DO
C      END DO
C
C      ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
C
C      DO J = 1, N2
C          BL(J) = 0.DO
C          BR(J) = 0.DO
C      END DO
C      DO I = 1, N1
C          BV(I) = 0.DO
C          BT(I) = 0.DO
C      END DO
C
C      В ПОДПРОГРАММЕ FDS_EL ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ A0,
C      ПРАВЫЙ A1 И ВЕРХНИЙ A2 КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ
C      СХЕМЫ НА ПЯТИТОЧЕЧНОМ ШАБЛОНЕ И ПРАВАЯ ЧАСТЬ F.
C
C      CALL FDS_EL ( X1L, X1R, X2L, X2R, N1, N2, BL, BR, BV, BT,
C      *             H1, H2, A(1), A(N+1), A(2*N+1), F )
C
C      В ПОДПРОГРАММЕ SWAND5 НАХОДИТСЯ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ
C      ЗАДАЧИ ИТЕРАЦИОННЫМ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНЫМ МЕТОДОМ
C      ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ - СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ.
C
C      IDEFAULT(1) = 0
C      IREPT       = 0
C
C      НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C

```

```

DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    Y(I,J) = 0.DO
  END DO
END DO
CALL SBAND5 ( N, N1, A, Y, F, EPSR, EPSA )
C
OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' )
WRITE ( 01, * ) NITER
WRITE ( 01, * ) ((Y(I,J),I=1,N1),J=1,N2)
CLOSE ( 01 )
C
STOP
END

```

Среди ее основных составляющих выделим подпрограмму FDS\_EL для задания коэффициентов сеточной задачи.

```

SUBROUTINE FDS_EL ( X1L, X1R, X2L, X2R, N1, N2, BL, BR, BB, BT,
*                   H1, H2, AO, A1, A2, F )
C
C   ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
C   ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
C   С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z )
DIMENSION AO(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2), F(N1,N2),
*          BL(N2), BR(N2), BB(N1), BT(N1)
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ
C
C   НА ВХОДЕ:
C
C   X1L, X1R - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА (ПЕРВАЯ ПЕРЕМЕННАЯ);
C   X2L, X2R - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА (ВТОРАЯ ПЕРЕМЕННАЯ);
C   N1, N2   - ЧИСЛО УЗЛОВ ПО ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ПЕРЕМЕННОЙ;
C   BL(N2)  - ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ЛЕВОЙ ГРАНИЦЕ (ПРИ X1 = X1L);
C   BR(N2)  - ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПРАВОЙ ГРАНИЦЕ (ПРИ X1 = X1R);
C   BB(N1)  - ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ (ПРИ X2 = X2L);
C   BT(N1)  - ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ (ПРИ X2 = X2R).
C
C   НА ВЫХОДЕ:
C
C   H1, H2   - ШАГИ РАВНОМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКИ;
C   AO, A1, A2 - КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C               (НА ПЯТИТОЧЕЧНОМ ШАБЛОНЕ С УЧЕТОМ СИММЕТРИИ);
C   F        - ПРАВАЯ ЧАСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ.
C
C   ЗАМЕЧАНИЯ:
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ И ПРАВАЯ ЧАСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАДАЮТСЯ

```

```

C      ПОДПРОГРАММАМИ-ФУНКЦИЯМИ АК, АQ, АF
C
H1 = (X1R-X1L) / (N1 - 1)
H2 = (X2R-X2L) / (N2 - 1)
H12 = H1 / H2
H21 = H2 / H1
HH = H1 * H2

C
C      ВНУТРЕННИЕ УЗЛЫ
C
DO J = 2, N2 - 1
  X2 = X2L + (J-1)*H2
  DO I = 2, N1 - 1
    X1 = X1L + (I - 1)*H1
    A1(I - 1, J) = H21*AK(X1 - 0.5D0*H1, X2)
    A1(I, J) = H21*AK(X1+0.5D0*H1, X2)
    A2(I, J-1) = H12*AK(X1, X2 - 0.5D0*H2)
    A2(I, J) = H12*AK(X1, X2+0.5D0*H2)
    AO(I, J) = A1(I - 1, J) + A1(I, J) + A2(I, J-1) + A2(I, J)
    *      + HH*AQ(X1, X2)
    F(I, J) = HH*AF(X1, X2)
  END DO
END DO

C
C      ЛЕВАЯ И ПРАВАЯ ГРАНИЦЫ: КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ ПЕРВОГО РОДА
C
DO J = 2, N2 - 1
  A1(1, J) = 0.D0
  A2(1, J) = 0.D0
  AO(1, J) = 1.D0
  F(1, J) = BL(J)
  A1(N1 - 1, J) = 0.D0
  A2(N1, J) = 0.D0
  AO(N1, J) = 1.D0
  F(N1, J) = BR(J)
END DO

C
C      НИЖНЯЯ И ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦЫ: КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ ПЕРВОГО РОДА
C
DO I = 2, N1 - 1
  A1(I, 1) = 0.D0
  A2(I, 1) = 0.D0
  AO(I, 1) = 1.D0
  F(I, 1) = BB(I)
  A1(I, N2) = 0.D0
  A2(I, N2 - 1) = 0.D0
  AO(I, N2) = 1.D0
  F(I, N2) = BT(I)
END DO

C
C      ЛЕВЫЙ НИЖНИЙ УГОЛ
C
A1(1, 1) = 0.D0

```

```

A2(1,1) = 0.DO
AO(1,1) = 1.DO
F(1,1) = 0.5DO*(BL(1) + BB(1))
C
C ЛЕВЫЙ ВЕРХНИЙ УГОЛ
C
A1(1,N2) = 0.DO
AO(1,N2) = 1.DO
F(1,N2) = 0.5DO*(BL(N2) + BT(1))
C
C ПРАВЫЙ НИЖНИЙ УГОЛ
C
A2(N1,1) = 0.DO
AO(N1,1) = 1.DO
F(N1,1) = 0.5DO*(BB(N1) + BR(1))
C
C ПРАВЫЙ ВЕРХНИЙ УГОЛ
C
AO(N1,N2) = 1.DO
F(N1,N2) = 0.5DO*(BT(N1) + BR(N2))
C
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AK (X1, X2 )
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z )
C
C КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ
C
AK = 1.DO
IF (X1 .LE. 0.5DO.AND. X2 .LE. 0.5DO ) AK = 10.DO
C
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AQ (X1, X2 )
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z )
C
C КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ УРАВНЕНИЯ
C
AQ = 0.DO
IF (X1 .LE. 0.5DO.AND. X2 .LE. 0.5DO ) AK = 0.DO
C
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AF (X1, X2 )
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z )
C
C ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ

```

```

C
  AF = 1.D0
  IF (X1 .LE. 0.5D0 .AND. X2 .LE. 0.5D0 ) AF = 0.D0
C
  RETURN
  END

```

В данном примере рассматривается задача для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами.

### 3.4.4. Результаты расчетов

Приведем некоторые данные экспериментов по численному решению модельной краевой задачи. Рассматриваемая задача моделирует процессы в кусочно-однородной среде, когда коэффициенты уравнения постоянны в отдельных подобластях. В расчетной области  $\Omega$  выделен прямоугольник  $\Omega_1$  (см. рис. 3.3). Краевая задача (3.60), (3.61) решается в условиях, когда

$$k(x), q(x), f(x) = \begin{cases} \kappa_1, q_1, f_1, & x \in \Omega_1, \\ \kappa_2, q_2, f_2, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Приведенный выше листинг программы соответствует базовому варианту, когда

$$\begin{aligned} l_1 &= 1,25, & l_2 &= 1, \\ s_1 &= 0,5, & s_2 &= 0,5, \\ \kappa_1 &= 1, & \kappa_2 &= 10, \\ q_1 &= 0, & q_2 &= 0, \\ f_1 &= 1, & f_2 &= 0, \end{aligned}$$

а граничные условия однородны ( $\mu(x) = 0$ ).

Первый вопрос, который нас интересует, касается эффективности используемого вычислительного алгоритма. Речь идет, прежде всего, о скорости сходимости итерационного метода, о сходимости приближенного решения к точному. В табл. 3.1 представлены результаты расчетов на последовательности сгущающихся сеток от  $N = N_1 = N_2 = 25$  до  $N = 400$ . Здесь  $n$  — число итераций (выход по достижению относительной точности  $\epsilon = 10^{-6}$ ), а  $y_{\max}$  — максимальное значение приближенного решения.

Для задачи с переменными коэффициентами выдерживается зависимость  $n = O(N^{1/2})$ , которая характерна для наиболее быстрых итераци-

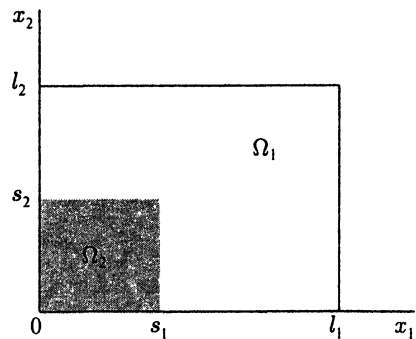


Рис. 3.3. Расчетная область



Таблица 3.1

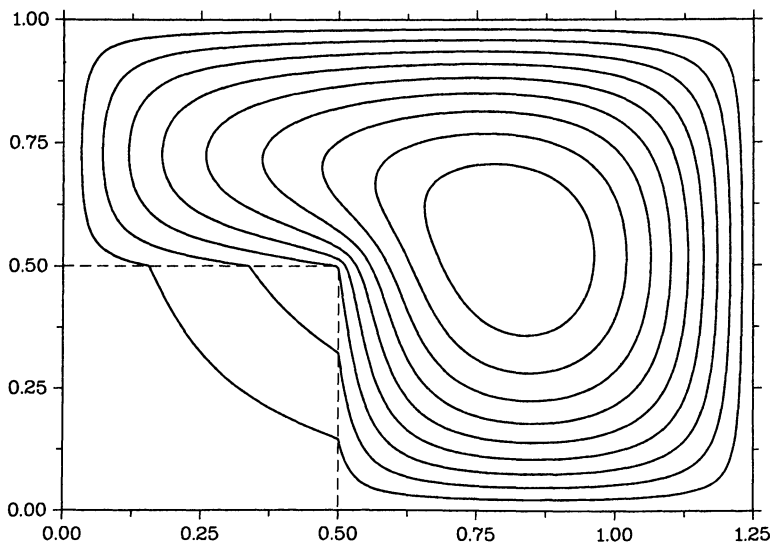
Расчеты на последовательности сеток

$N$	25	50	100	200	400
$n$	17	22	32	47	69
$y_{\max}$	0,06161	0,06240	0,06266	0,06278	0,06284

онных методов. Для рассматриваемой задачи с разрывными коэффициентами мы не можем рассчитывать на сходимость разностного решения со скоростью  $(h^2)$ , которая имеет место в задачах с гладкими решениями. Реально достигаемую скорость сходимости отчасти иллюстрируют данные по максимальному значению приближенного решения.

На рис. 3.4 представлено приближенное решение задачи для базового варианта. Интересно проследить влияние отношения коэффициентов  $\kappa_2/\kappa_1$ . Зафиксируем  $\kappa_1 = 1$  и будем менять  $\kappa_2$ . Два случая (относительно большого и малого коэффициента  $\kappa_2$ ) представлены на рис. 3.5, 3.6.

Использование больших (малых) коэффициентов при старших производных соответствует применению метода фиктивных областей. При больших коэффициентах (см. рис. 3.5) на границе нерегулярной области  $\Omega_1$  реализуются однородные граничные условия Дирихле. Второй

Рис. 3.4. Решение задачи на сетке  $N = N_1 = N_2 = 100$

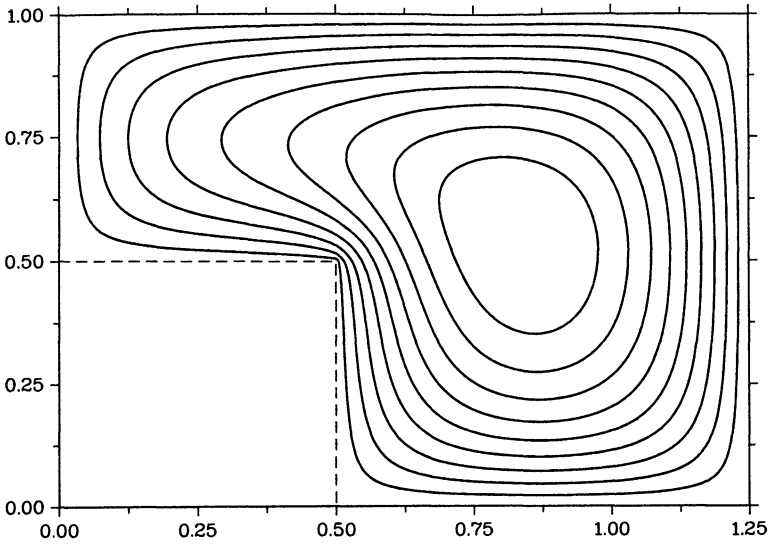


Рис. 3.5. Решение задачи с  $\kappa_2 = 100$

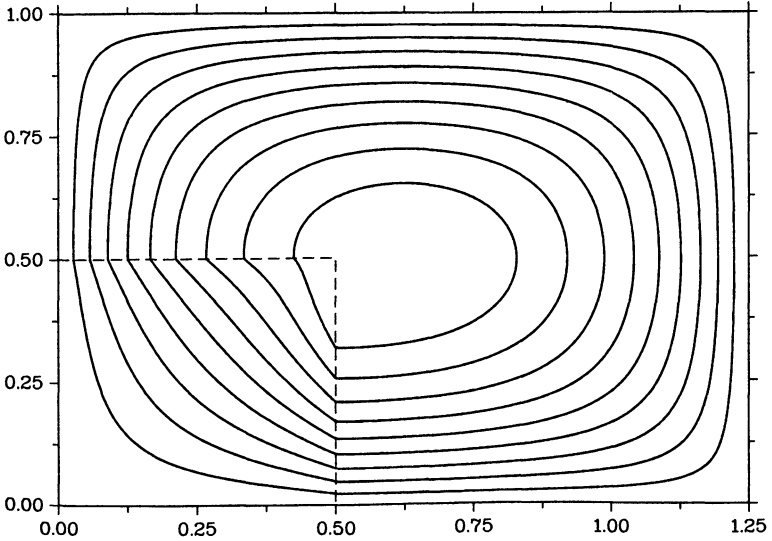


Рис. 3.6. Решение задачи с  $\kappa_2 = 0,01$

предельный случай (малый коэффициент  $\kappa_2$ ) дает приближенные однородные граничные условия Неймана (рис. 3.6).

### 3.5. Задачи и упражнения

3.1. В нерегулярной области  $\Omega$  рассматривается краевая задача

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.64)$$

$$u(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (3.65)$$

при

$$k(x) \geq \kappa > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

В методе фиктивных областей расчетная область  $\Omega$  погружается в область  $\Omega_0$ . Вместо приближенного решения задачи (3.64), (3.65) рассматривается краевая задача

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) + q_\varepsilon(x)u_\varepsilon = f_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_0, \quad (3.66)$$

$$u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_0. \quad (3.67)$$

Рассмотрите вариант метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам, когда

$$k_\varepsilon(x), q_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x) = \begin{cases} k(x), q(x), f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^{-2}, 0, 0, & x \in \Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Покажите, что  $\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

3.2. Рассмотрите вариант метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам для приближенного решения задачи (3.64), (3.65), когда в (3.66), (3.67)

$$k_\varepsilon(x), q_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x) = \begin{cases} k(x), q(x), f(x), & x \in \Omega, \\ 1, \varepsilon^{-2}, 0, & x \in \Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Omega. \end{cases}$$

3.3. Покажите, что разностная схема

$$-y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = \varphi(x), \quad x \in \omega,$$

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\omega,$$

в которой

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{h_1^2}{12} f_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{h_2^2}{12} f_{\bar{x}_2 x_2},$$

аппроксимирует краевую задачу (3.2), (3.3) с четвертым порядком.

**3.4.** Аппроксимируйте граничное условие третьего рода

$$-k(0, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma(x_2)u(0, x_2) = \mu(x_2),$$

которое задано на одной стороне прямоугольника  $\Omega$  (на других участках границы — граничные условия первого рода) при численном решении уравнения (3.1).

**3.5.** Постройте разностную схему для решения краевой задачи (3.1), (3.3) с условиями сопряжения при  $x_1 = x_1^*$ :

$$\begin{aligned} u(x_1^* + 0, x_2) - u(x_1^* - 0, x_2) &= 0, \\ k \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^* + 0, x_2) - k \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^* - 0, x_2) &= \chi(x_2). \end{aligned}$$

**3.6.** Рассмотрите аппроксимацию эллиптического уравнения второго порядка со смешанными производными

$$-\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

в котором

$$k_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = k_{\beta\alpha}(\mathbf{x}), \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

**3.7.** Уравнения Пуассона в круговом цилиндре при использовании цилиндрических координат записывается в виде

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, \varphi, z).$$

Постройте разностную схему для этого уравнения с граничными условиями первого рода на поверхности кругового цилиндра.

**3.8.** Пусть разностная схема записывается в виде

$$A(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(\mathbf{x})} B(\mathbf{x}, \xi)y(\xi) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega,$$

причем

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) &> 0, \quad B(\mathbf{x}, \xi) > 0, \quad \xi \in \mathcal{W}'(\mathbf{x}), \\ D(\mathbf{x}) &= A(\mathbf{x}) - \sum_{\xi \in \mathcal{W}'(\mathbf{x})} B(\mathbf{x}, \xi) > 0, \quad \mathbf{x} \in \omega. \end{aligned}$$

Покажите, что для решения задачи справедлива оценка

$$\|y(x)\|_{C_\omega} \leq \left\| \frac{\varphi(x)}{D(x)} \right\|_{C_\omega}.$$

**3.9.** Пусть в итерационном методе (метод переменных направлений)

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \dots$$

имеет место

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1,$$

причем

$$\delta_\alpha E \leq A_\alpha \leq \Delta_\alpha E, \quad A_\alpha = A_\alpha^*, \quad \delta_\alpha > 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

а оператор  $B$  представлен в факторизованном виде

$$B = (E + \nu A_1)(E + \nu A_2).$$

Найдите оптимальное значение параметра  $\nu$ .

**3.10.** Для решения сеточной задачи

$$Ay = \varphi, \quad A = A^* > 0$$

используется треугольный итерационный метод

$$(D + \tau A_1) \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = \varphi,$$

где  $D$  — произвольный самосопряженный оператор, а

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_2^*.$$

Найдите оптимальное значение итерационного параметра  $\tau$ , когда априорная информация задана в виде

$$\delta D \leq A, \quad A_1 D^{-1} A_2 \leq \frac{\Delta}{4} A.$$

**3.11.** Получите расчетную формулу

$$\tau_{k+1} = \frac{(w_k, r_k)}{(Aw_k, w_k)}, \quad w_k = B^{-1} r_k, \quad r_k = Ay_k - \varphi$$

для итерационного параметра в итерационном методе скорейшего спуска

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = \varphi, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$A = A^* > 0, \quad B = B^* > 0,$$

из условия минимума нормы погрешности в  $H_A$  на новой итерации.

**3.12.** С использованием программы PROBLEM2 проведите исследования зависимости скорости сходимости используемого итерационного процесса от переменного коэффициента  $k(x)$  (в простейшем случае зависимость числа итераций от  $\kappa_2$ ).

**3.13.** Проведите численные эксперименты с использованием программы PROBLEM2 по решению задачи Дирихле в ступенчатой области  $\Omega_1$  (рис. 3.3) на основе использования варианта метода фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам.

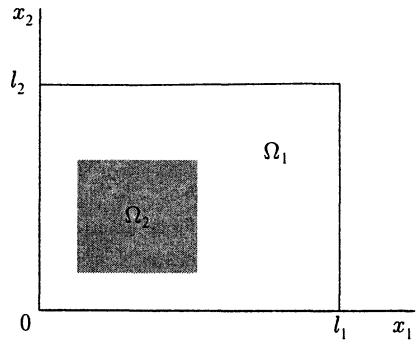
**3.14.** Модифицируйте программу PROBLEM2 для решения третьей краевой задачи (граничные условия (3.4)) для уравнения (3.60).

**3.15.** Рассмотрите видоизмененную задачу Дирихле для уравнения (3.1) в двухсвязной области  $\Omega_1$  (рис. 3.7). На внешней границе задаются условия (3.1), а на внутренней решение постоянно, но само оно определяется из дополнительного интегрального условия:

$$u(x) = \text{const}, \quad x \in \partial\Omega_2,$$

$$\int_{\partial\Omega_1} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dx = 0.$$

Используйте для приближенного решения метод фиктивных областей, программную реализацию которого проведите с использованием PROBLEM2.



**Рис. 3.7.** К постановке видоизмененной задачи Дирихле

## Глава 4

---

# Краевые задачи для параболических уравнений

В качестве типичной нестационарной задачи математической физики рассматривается краевая задача для одномерного по пространству параболического уравнения второго порядка. После аппроксимации по пространству приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Аппроксимация по времени проводится, как правило, с использованием двух слоев по времени. Реже применяются трехслойные разностные схемы. Основой теоретического исследования сходимости разностных схем для нестационарных задач является теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем, рассматриваемых в гильбертовых пространствах сеточных функций. Приведены условия устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем в различных условиях. Проведены численные эксперименты по приближенному решению модельной краевой задачи для одномерного параболического уравнения.

### 4.1. Разностные схемы

Строятся разностные схемы для модельного одномерного параболического уравнения второго порядка. Аппроксимация по времени проведена с использованием двух и трех временных слоев.

#### 4.1.1. Краевые задачи

Рассматривается простейшая краевая задача для одномерного параболического уравнения. Расчетная область представляет собой прямоугольник

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Решение определяется из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.1)$$

когда коэффициент  $k$  зависит только от пространственной переменной, причем  $k(x) \geq \kappa > 0$ .

Рассматривается первая краевая задача (граничные условия предполагаются однородными), когда уравнение (4.1) дополняется условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (4.2)$$

Заданы также начальные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.3)$$

В более общей ситуации необходимо ориентироваться на использование граничных условий третьего рода. В этом случае вместо (4.2) имеем

$$-k(0) \frac{du}{dx}(0, t) + \sigma_1(t)u(0, t) = \mu_1(t), \quad (4.4)$$

$$k(l) \frac{du}{dx}(l, t) + \sigma_2(t)u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Краевая задача (4.1)–(4.3) рассматривается как задача Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$  для функций, заданных в области  $\Omega = (0, l)$  и обращающихся в нуль в граничных точках (на  $\partial\Omega$ ). Для нормы и скалярного произведения использованы обозначения

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx,$$

$$\|v\|^2 = (v, v) = \int_{\Omega} v^2(x) dx.$$

Определим оператор

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad (4.5)$$

для функций, удовлетворяющих краевым условиям (4.2).

Краевая задача (4.1)–(4.3) записывается как задача нахождения  $u(t) \in \mathcal{H}$  из дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4.6)$$



дополненного начальным условием

$$u(0) = u_0. \quad (4.7)$$

Оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряженным и положительно определенным в  $\mathcal{H}$ , т. е.

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \geq mE, \quad m = \kappa \frac{\pi^2}{l^2} > 0. \quad (4.8)$$

С учетом этого (см. доказательство теоремы 1.1) устанавливается следующая априорная оценка для решения задачи (4.6)–(4.8):

$$\|u(t)\| \leq \exp\{-mt\} \left( \|u_0\| + \int_0^t \exp\{m\theta\} \|f(\theta)\| d\theta \right). \quad (4.9)$$

Более грубая оценка с привлечением только лишь неотрицательности оператора  $\mathcal{A}$  получена ранее (в теореме 1.1) и имеет вид

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\theta)\| d\theta. \quad (4.10)$$

Оценки (4.9), (4.10) выражают устойчивость решения задачи (4.6)–(4.8) по начальным данным и правой части. Такие основные свойства дифференциальной задачи должны наследоваться (передаваться) при переходе к дискретной задаче.

#### 4.1.2. Аппроксимация по пространству

Как обычно, обозначим через  $\bar{\omega}$  равномерную сетку с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$ :

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\}$$

и пусть  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Во внутренних узлах дифференциальный оператор (4.5) аппроксимируем со вторым порядком разностным оператором

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega, \quad (4.11)$$

где, например,  $a(x) = k(x - 0,5h)$ .

В сеточном гильбертовом пространстве  $H$  норму введем соотношением  $\|y\| = (y, y)^{1/2}$ , где

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h.$$

На множестве функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , для самосопряженного оператора  $A$  при ограничениях  $k(x) \geq \kappa > 0$ , верна оценка

$$A = A^* \geq \kappa \lambda_0 E, \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}$$

— минимальное собственное значение разностного оператора второй производной на равномерной сетке.

После аппроксимации по пространству задаче (4.6), (4.7) ставится в соответствие задача

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f, \quad x \in \omega, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega. \quad (4.14)$$

В силу (4.12) для решения задачи (4.13), (4.14) имеет место оценка

$$\|y(x, t)\| \leq \exp\{-\kappa \lambda_0 t\} \left( \|u_0(x)\| + \int_0^t \exp\{\kappa \lambda_0 \theta\} \|f(x, \theta)\| d\theta \right), \quad (4.15)$$

которая согласована с оценкой (4.9).

### 4.1.3. Аппроксимация по времени

Следующий шаг состоит в аппроксимации по времени при приближенном решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.13), (4.14). Определим равномерную сетку по времени

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\}.$$

Обозначим через  $A, B: H \rightarrow H$  линейные операторы в  $H$ , зависящие, вообще говоря, от  $\tau, t_n$ . Будем пользоваться безындексными обозначениями теории разностных схем

$$y = y_n, \quad \hat{y} = y_{n+1}, \quad \check{y} = y_{n-1},$$

$$y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}.$$

В двухслойной разностной схеме при решении нестационарного уравнения переход на новый временной слой  $t = t_{n+1}$  осуществляется с использованием решения  $y_n$  на предыдущем временном слое.

При использовании двухслойной схемы уравнение (4.13) аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = \varphi_n, \quad (4.16)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

где  $\sigma$  — числовой параметр (вес), который обычно удовлетворяет условию  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Для правой части можно, например, положить

$$\varphi_n = \sigma f_{n+1} + (1 - \sigma)f_n.$$

Аппроксимация начального условия (4.14) дает

$$y_0 = u_0(x), \quad x \in \omega. \quad (4.17)$$

Схема (4.16) носит название **схемы с весами**.

Для погрешности аппроксимации первой производной по времени имеем

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} = \frac{dv}{dt}(t^*) + O(\tau^\nu),$$

где  $\nu = 2$  при  $t^* = t_{n+1/2}$  и  $\nu = 1$  в других случаях. В силу этого разностное уравнение (4.16) аппроксимирует уравнение (4.13) со вторым порядком по времени, если  $\sigma = 0,5$ , и с первым, если  $\sigma \neq 0,5$ .

Приведем также **трехслойную разностную схему с весами** для уравнения (4.13), когда задействованы три слоя по времени ( $t_{n+1}$ ,  $t_n$  и  $t_{n-1}$ ):

$$\left( \theta \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (1 - \theta) \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} \right) +$$

$$+ A(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y_n + \sigma_2 y_{n-1}) = \varphi_n, \quad (4.18)$$

$$n = 1, 2, \dots, N_0 - 1.$$

Для правой части естественно использовать аппроксимации

$$\varphi_n = \sigma_1 f_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)f_n + \sigma_2 f_{n-1}.$$

Расчеты по трехслойной схеме мы можем начать при известных  $y_0$  и  $y_1$ :

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1. \quad (4.19)$$

Для  $y_0$  используется начальное условие (4.14), а для нахождения  $y_1$  привлекается двухслойная разностная схема. Например,

$$\frac{y_1 - y_0}{\tau} + \frac{1}{2}A(y_1 + y_0) = \frac{1}{2}(f_1 + f_0).$$

В разностной схеме (4.18), (4.19) присутствует весовой параметр  $\theta$  для аппроксимации производной по времени и два весовых параметра  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  для аппроксимации других членов уравнения. Приведем некоторые типичные наборы весовых параметров, которые нашли применение в вычислительной практике.

Увеличение числа используемых слоев при аппроксимации нестационарного уравнения направлено, прежде всего, на повышение порядка аппроксимации. Поэтому при рассмотрении трехслойных схем (4.18), (4.19) естественно ограничиться схемами, которые аппроксимируют по времени исходную задачу (4.13), (4.14) с порядком не ниже второго.

Прежде всего выделим однопараметрическое семейство симметричных разностных схем второго порядка аппроксимации

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = \varphi_n, \quad (4.20)$$

когда в (4.18)

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2.$$

Отдельного внимания заслуживает также схема

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2\tau} + Ay_{n+1} = \varphi_n, \quad (4.21)$$

которая аппроксимирует уравнение (4.13) с точностью  $O(\tau^2)$  при соответствующем задании правой части (например,  $\varphi_n = f_{n+1}$ ). Схема (4.21) соответствует выбору

$$\theta = \frac{3}{2}, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0$$

в (4.18).

## 4.2. Устойчивость двухслойных разностных схем

Центральное место в исследовании корректности приближенных методов решения нестационарных задач занимает теория устойчивости. Вводятся основные понятия теории устойчивости операторно-разностных схем, рассматриваемых в конечномерных гильбертовых пространствах, формулируются критерии устойчивости двухслойных разностных схем по начальным данным, приводятся типичные оценки устойчивости по начальным данным и правой части.

### 4.2.1. Основные понятия

Условия устойчивости формулируются для разностных схем, записанных в единой общей (канонической) форме. Любую двухслойную схему можно записать в виде

$$B(t_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(t_n) y_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (4.22)$$

$$y_0 = u_0, \quad (4.23)$$

где  $y_n = y(t_n) \in H$  — искомая функция, а  $\varphi_n, u_0 \in H$  заданы. Запись (4.22), (4.23) будем называть **канонической формой двухслойных схем**.

Для разрешимости задачи Коши на новом временном слое предполагается, что  $B^{-1}$  существует. Тогда уравнение (4.22) можно записать в виде

$$y_{n+1} = S y_n + \tau \tilde{\varphi}_n, \quad S = E - \tau B^{-1} A, \quad \tilde{\varphi}_n = B^{-1} \varphi_n. \quad (4.24)$$

Оператор  $S$  называется **оператором перехода** двухслойной разностной схемы (со слоя на слой).

Двухслойная схема называется **устойчивой**, если существуют такие положительные постоянные  $m_1$  и  $m_2$ , не зависящие от  $\tau$  и выбора  $u_0, \varphi$ , что при любых  $u_0 \in H, \varphi \in H, t \in \bar{\omega}_\tau$  для решения задачи (4.22), (4.23) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq m_1 \|u_0\| + m_2 \max_{0 \leq \theta \leq t_n} \|\varphi(\theta)\|_*, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (4.25)$$

где  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|_*$  — некоторые нормы в пространстве  $H$ . Неравенство (4.25) отражает свойство непрерывной зависимости решения задачи (4.22), (4.23) от входных данных.

Разностная схема

$$B(t_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(t_n) y_n = 0, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (4.26)$$

$$y_0 = u_0 \quad (4.27)$$

называется **устойчивой по начальным данным**, если для решения задачи (4.26), (4.27) выполняется оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq m_1 \|u_0\|, \quad t_n \in \omega_\tau. \quad (4.28)$$

Двухслойная разностная схема

$$B(t_n) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(t_n) y_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (4.29)$$

$$y_0 = 0 \quad (4.30)$$

устойчива по правой части, если для решения выполняется неравенство

$$\|y_{n+1}\| \leq m_2 \max_{0 \leq \theta \leq t_n} \|\varphi(\theta)\|_*, \quad t_n \in \omega_\tau. \quad (4.31)$$

Разностная схема (4.26), (4.27) называется  $\rho$ -устойчивой (равномерно устойчивой) по начальным данным в  $H_R$ , если существуют постоянная  $\rho > 0$  и постоянная  $m_1$ , не зависящая от  $\tau$ ,  $n$ , такие, что при любых  $n$  и при всех  $y_n \in H$  для решения  $y_{n+1}$  разностного уравнения (4.26) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_R \leq \rho \|y_n\|_R, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (4.32)$$

причем  $\rho^n \leq m_1$ .

В теории разностных схем в качестве константы  $\rho$  выбирается обычно одна из величин

$$\rho = 1, \quad \rho = 1 + c\tau, \quad \rho = \exp\{c\tau\}, \quad c > 0,$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $\tau$ ,  $n$ .

Перепишем уравнение (4.26) с учетом (4.24) в виде

$$y_{n+1} = S y_n. \quad (4.33)$$

Требование  $\rho$ -устойчивости эквивалентно выполнению двустороннего операторного неравенства

$$-\rho R \leq RS \leq \rho R, \quad (4.34)$$

если  $RS$  — самосопряженный оператор ( $RS = S^*R$ ). Для любого оператора перехода в (4.33) условие  $\rho$ -устойчивости имеет вид

$$S^*RS \leq \rho^2 R. \quad (4.35)$$

Сформулируем разностный аналог леммы Гронуолла (см. лемму 1.1)

**Лемма 4.1.** Из оценки разностного решения на слое

$$\|y_{n+1}\| \leq \rho \|y_n\| + \tau \|\varphi_n\|_* \quad (4.36)$$

следует априорная оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \rho^{n+1} \|y_0\| + \sum_{k=0}^n \tau \rho^{n-k} \|\varphi_k\|_*. \quad (4.37)$$

Тем самым из послылой оценки решения мы получаем априорную оценку разностного решения на любой момент времени.

### 4.2.2. Устойчивость по начальным данным

Сформулируем основные критерии устойчивости двухслойных операторно-разностных схем по начальным данным. Наиболее важной является следующая теорема о точных (совпадающих необходимых и достаточных) условиях устойчивости в  $H_A$ .

**Теорема 4.1.** Пусть в уравнении (4.26) оператор  $A$  является самосопряженным положительным оператором и постоянным (не зависит от  $n$ ).  
Условие

$$B \geq \frac{\tau}{2}A, \quad t \in \omega_\tau, \quad (4.38)$$

необходимо и достаточно для устойчивости в  $H_A$ , т. е. для выполнения оценки

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|u_0\|_A, \quad t \in \omega_\tau. \quad (4.39)$$

*Доказательство.* Умножая уравнение (4.26) скалярно на  $y_t$ , получим тождество

$$(By_t, y_t) + (Ay_t, y_t) = 0. \quad (4.40)$$

Пользуясь представлением

$$y = \frac{1}{2}(y + \hat{y}) - \frac{1}{2}\tau y_t,$$

перепишем (4.40) в виде

$$\left( \left( B - \frac{\tau}{2}A \right) y_t, y_t \right) + \frac{1}{2\tau} (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 0. \quad (4.41)$$

Для самосопряженного оператора  $A$  имеем  $(Ay, \hat{y}) = (y, A\hat{y})$  и

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y).$$

Подставляя в (4.41) и используя условие (4.38), приходим к неравенству

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_n\|_A, \quad (4.42)$$

из которого следует доказываемая оценка (4.39).

Для доказательства необходимости неравенства (4.39) предположим, что схема устойчива в  $H_A$ , т. е. выполнено неравенство (4.39). Докажем, что отсюда следует операторное неравенство (4.38). Будем исходить из тождества (4.41) на первом слое  $n = 0$

$$2\tau \left( \left( B - \frac{\tau}{2}A \right) w, w \right) + (Ay_1, y_1) = (Ay_0, y_0), \quad w = \frac{y_1 - y_0}{\tau}.$$

В силу (4.39) это тождество может быть выполнено только при

$$\left( \left( B - \frac{\tau}{2}A \right) w, w \right) \geq 0.$$

Так как  $y_0 = u_0 \in H$  — произвольный элемент, то и элемент  $w = -B^{-1}Au_0 \in H$  произволен. В самом деле, задавая любой элемент  $w \in H$ , находим  $u_0 = -A^{-1}Bw \in H$ , так как  $A^{-1}$  существует. Таким образом, неравенство выполнено при любых  $w \in H$ , т. е. имеет место операторное неравенство (4.38). ■

Условие (4.38) является необходимым и достаточным для устойчивости не только в  $H_A$ , но и в других нормах. Не обсуждая всех возможностей в этом направлении, сформулируем без доказательства только результат об устойчивости в  $H_B$ .

**Теорема 4.2.** Пусть в (4.26), (4.27) операторы  $A$  и  $B$  постоянны и

$$B = B^* > 0, \quad A = A^* > 0. \quad (4.43)$$

Тогда условие (4.38) необходимо и достаточно для устойчивости схемы (4.26), (4.27) по начальным данным в  $H_B$  с  $\rho = 1$ .

При рассмотрении общих нестационарных задач необходимо ориентироваться на условия  $\rho$ -устойчивости.

**Теорема 4.3.** Пусть  $A$  и  $B$  — постоянные операторы и

$$A = A^*, \quad B = B^* > 0.$$

Тогда условия

$$\frac{1 - \rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1 + \rho}{\tau} B \quad (4.44)$$

необходимы и достаточны для  $\rho$ -устойчивости в  $H_B$  схемы (4.26), (4.27), т. е. для выполнения

$$\|y_{n+1}\|_B \leq \rho \|y_n\|_B.$$

*Доказательство.* Записывая схему (4.26) в виде (4.33), из (4.34) получим условия устойчивости в  $H_B$

$$-\rho B \leq B - \tau A \leq \rho B.$$

Это двухстороннее операторное неравенство формулируется в более приемлемой форме в виде неравенств (4.44) на операторы рассматриваемой двухслойной разностной схемы. ■

Специально подчеркнем, что в условиях теоремы не предполагается положительность (или хотя бы неотрицательность) оператора  $A$ . При дополнительном предположении о положительности оператора  $A$  устанавливается необходимость и достаточность условий (4.44) для  $\rho$ -устойчивости схемы (4.26), (4.27) в  $H_A$ .

При  $\rho \geq 1$  устойчивость, как и в теореме 4.1, устанавливается для двухслойных разностных схем с несамосопряженным оператором  $B$ .



**Теорема 4.4.** Пусть оператор  $A$  является самосопряженным, положительным и постоянным. Тогда при

$$B \geq \frac{\tau}{1 + \rho} A \quad (4.45)$$

разностная схема (4.26), (4.27)  $\rho$ -устойчива в  $H_A$ .

*Доказательство.* Добавим и вычтем из основного энергетического тождества (см. (4.41))

$$2\tau \left( \left( B - \frac{\tau}{2} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y) = 0 \quad (4.46)$$

выражение

$$2\tau^2 \frac{1}{1 + \rho} (Ay_t, y_t)$$

и получим

$$2\tau \left( \left( B - \frac{\tau}{1 + \rho} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y) - \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \tau^2 (Ay_t, y_t) = 0.$$

С учетом условия (4.45) и самосопряженности оператора  $A$  после простейших выкладок получим

$$(A\hat{y}, \hat{y}) - \rho(Ay, y) + (\rho - 1)(A\hat{y}, y) \leq 0.$$

Применяя неравенство

$$|(A\hat{y}, y)| \leq \|\hat{y}\|_A \cdot \|y\|_A$$

и вводя обозначения

$$\eta = \frac{\|\hat{y}\|_A}{\|y\|_A},$$

придем к неравенству

$$\eta^2 - (\rho - 1)\eta + \rho \leq 0.$$

Оно верно при всех  $1 \leq \eta \leq \rho$  и тем самым выполнена искомая оценка

$$\|\hat{y}\|_A \leq \|y\|_A,$$

обеспечивающая устойчивость в  $H_A$ . ■

Перейдем к получению априорных оценок, выражающих устойчивость по правой части. На такого типа результатах базируется исследование сходимости разностных схем для нестационарных задач.

### 4.2.3. Устойчивость по правой части

Прежде всего покажем, что из устойчивости по начальным данным в  $H_R$ ,  $R = R^* > 0$ , следует и устойчивость схемы по правой части при использовании нормы  $\|\varphi\|_* = \|B^{-1}\varphi\|_R$ .

**Теорема 4.5.** Пусть разностная схема (4.22), (4.23)  $\rho$ -устойчива в  $H_R$  по начальным данным, т. е. имеет место оценка (4.42) при  $\varphi_n = 0$ . Тогда разностная схема (4.22), (4.23) устойчива по правой части и для решения справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_R \leq \rho^{n+1} \|u_0\|_R + \sum_{k=0}^n \tau \rho^{n-k} \|B^{-1}\varphi_k\|_R. \quad (4.47)$$

*Доказательство.* Так как  $B^{-1}$  существует, то уравнение (4.22) можно записать в виде

$$y_{n+1} = S y_n + \tau \tilde{\varphi}_n, \quad (4.48)$$

$$S = E - \tau B^{-1} A, \quad \tilde{\varphi}_n = B^{-1} \varphi_n.$$

Из (4.48) находим

$$\|y_{n+1}\|_R \leq \|S y_n\|_R + \tau \|B^{-1} \varphi_n\|_R. \quad (4.49)$$

Требование  $\rho$ -устойчивости схемы по начальным данным эквивалентно ограниченности нормы оператора перехода  $S$

$$\|S y_n\|_R \leq \rho \|y_n\|_R, \quad t \in \omega_\tau.$$

В силу этого из (4.49) получим

$$\|y_{n+1}\|_R \leq \rho \|y_n\|_R + \tau \|B^{-1} \varphi_n\|_R.$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла, получаем требуемую оценку (4.47), выражающую устойчивость схемы по начальным данным и правой части. ■

В частности, если  $D = A$  или  $D = B$  (при  $A = A^* > 0$  или  $B = B^* > 0$ ), то из (4.47) следуют простейшие оценки устойчивости в энергетическом пространстве  $H_A$  или  $H_B$ .

Некоторые новые оценки для двухслойной разностной схемы (4.22), (4.23) можно получить при закруглении критерия устойчивости (4.48).

**Теорема 4.6.** Пусть  $A$  — постоянный самосопряженный и положительный оператор, а  $B$  удовлетворяет условию

$$B \geq \frac{1 + \varepsilon}{2} \tau A \quad (4.50)$$

с некоторой постоянной  $\varepsilon > 0$ , не зависящей от  $\tau$ . Тогда для разностной схемы (4.22), (4.23) справедлива априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|u_0\|_A^2 + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \sum_{k=0}^n \tau \|\varphi\|_{B^{-1}}^2. \quad (4.51)$$

*Доказательство.* Умножая уравнение (4.22) скалярно на  $2\tau y_t$ , аналогично (4.46) получим энергетическое тождество

$$2\tau \left( \left( B - \frac{\tau}{2} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \quad (4.52)$$

Оценим правую часть последнего выражения следующим образом:

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau \|\varphi\|_{B^{-1}} \cdot \|y_t\|_B \leq 2\tau\varepsilon_1 \|y_t\|_B^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\varphi\|_{B^{-1}}^2$$

с пока неопределенной положительной постоянной  $\varepsilon_1$ . Подставляя эту оценку в (4.52), получим

$$2\tau \left( \left( (1-\varepsilon_1)B - \frac{\tau}{2} A \right) y_t, y_t \right) + (A\hat{y}, \hat{y}) \leq (Ay, y) + \frac{\tau}{2\varepsilon_1} \|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Если выполнено условие (4.50), то можно выбрать  $\varepsilon_1$  так, чтобы

$$\frac{1}{1-\varepsilon_1} = 1 + \varepsilon,$$

и поэтому

$$(1-\varepsilon_1)B - \frac{\tau}{2} A = (1-\varepsilon_1) \left( B - \frac{1+\varepsilon}{2} \tau A \right) \geq 0,$$

$$(A\hat{y}, \hat{y}) \leq (Ay, y) + \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \tau \|\varphi\|_{B^{-1}}^2.$$

Последнее неравенство дает оценку (4.51). ■

**Теорема 4.7.** Пусть  $A$  — постоянный самосопряженный и положительный оператор, а  $B$  удовлетворяет условию

$$B \geq G + \frac{\tau}{2} A, \quad G = G^* > 0. \quad (4.53)$$

Тогда для (4.22), (4.23) верна априорная оценка

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq \|u_0\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \tau \|\varphi_k\|_{G^{-1}}^2. \quad (4.54)$$

*Доказательство.* В тождестве (4.52) используем оценку

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau(Gy_t, y_t) + \frac{\tau}{2}(G^{-1}\varphi, \varphi).$$

Подставим эту оценку в (4.52) и с учетом (4.53) получим

$$(A\hat{y}, \hat{y}) \leq (Ay, y) + \frac{1}{2}\tau\|\varphi\|_{G^{-1}}^2,$$

что на основании разностного аналога леммы Гронуолла дает (4.54). ■

Исследование сходимости разностных схем проводится в различных классах гладкости решения исходной дифференциальной задачи, и поэтому мы должны иметь достаточно широкий спектр оценок, в которых, в частности, правая часть оценивается в различных и просто вычисляемых нормах. Мы ограничились только некоторыми типичными априорными оценками решений операторно-разностных схем.

### 4.3. Трехслойные операторно-разностные схемы

Проведено исследование трехслойных операторно-разностных схем. Основой рассмотрения является переход к эквивалентной двухслойной операторно-разностной схеме. Получены оценки устойчивости по начальным данным и правой части в различных нормах.

#### 4.3.1. Устойчивость по начальным данным

При исследовании устойчивости трехслойных разностных схем используется следующая каноническая форма трехслойных разностных схем:

$$B(t_n)\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(t_n)(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + A(t_n)y_n = \varphi_n, \quad (4.55)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

при заданных

$$y_0 = u_0, \quad y_1 = u_1. \quad (4.56)$$

Получим условия устойчивости по начальным данным при постоянных, не зависящих от  $n$ , самосопряженных операторах  $A, B, R$ , т. е. вместо общей схемы (4.55) будем рассматривать

$$B\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = 0. \quad (4.57)$$

Приведем простейшую априорную оценку для схемы (4.56), (4.57), которая выражает устойчивость по начальным данным. Положим

$$u_n = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), \quad w_n = y_n - y_{n-1} \quad (4.58)$$

и с учетом тождества

$$y_n = \frac{1}{4}(y_{n+1} + 2y_n + y_{n-1}) - \frac{1}{4}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

перепишем схему (4.57) в виде

$$B \frac{w_{n+1} + w_n}{2\tau} + R(w_{n+1} - w_n) - A(w_{n+1} - w_n) + A \frac{u_{n+1} + u_n}{2} = 0. \quad (4.59)$$

Домножим скалярно уравнение (4.59) на

$$2(u_{n+1} - u_n) = w_{n+1} + w_n,$$

что дает равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\tau} (B(w_{n+1} + w_n), w_{n+1} + w_n) + (R(w_{n+1} - w_n), w_{n+1} + w_n) - \\ & - \frac{1}{4} (A(w_{n+1} - w_n), w_{n+1} + w_n) + (A(u_{n+1} + u_n), u_{n+1} - u_n) = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Для самосопряженных операторов  $R$  и  $A$  и неотрицательного оператора  $B$  ( $B \geq 0$ ) из (4.60) следует неравенство

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_n, \quad (4.61)$$

где с учетом обозначений (4.58) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} = & \frac{1}{4} (A(y_{n+1} + y_n), y_{n+1} + y_n) + \\ & + (R(y_{n+1} - y_n), y_{n+1} - y_n) - \frac{1}{4} (A(y_{n+1} - y_n), y_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (4.62)$$

При некоторых ограничениях величина  $\mathcal{E}_n$ , определяемая согласно (4.62), задает норму, и поэтому неравенство (4.61) обеспечивает устойчивость операторно-разностной схемы по начальным данным. Более точно, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.8.** Пусть в операторно-разностной схеме (4.57) операторы  $R$  и  $A$  являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B \geq 0, \quad A > 0, \quad R > \frac{1}{4}A \quad (4.63)$$

имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|y_{n+1} + y_n\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_R^2 - \frac{1}{4} \|y_{n+1} - y_n\|_A^2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} \|y_n + y_{n-1}\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_R^2 - \frac{1}{4} \|y_n - y_{n-1}\|_A^2, \end{aligned} \quad (4.64)$$

т. е. операторно-разностная схема (4.57) устойчива по начальным данным.

Особенностью рассматриваемых трехслойных схем является именно сложная конструкция нормы (см. (4.62)). В некоторых важных случаях при сужении класса разностных схем, загромождении условий устойчивости удается использовать более простые нормы.

### 4.3.2. Переход к двухслойной схеме

Исследование многослойных разностных схем удобно проводить на основе перехода к эквивалентной двухслойной схеме. Для двухслойных схем получены наиболее глубокие (в частности, совпадающие необходимые и достаточные условия устойчивости) результаты.

Обозначим через  $H^2$  прямую сумму пространств  $H$ :  $H^2 = H \oplus H$ . Для векторов  $U = \{u^1, u^2\}$  сложение и умножение в  $H^2$  определяется покомпонентно, а скалярное произведение

$$(U, V) = (u^1, v^1) + (u^2, v^2).$$

На  $H^2$  определим операторы (операторные матрицы)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

элементы которых  $G_{\alpha\beta}$  являются операторами на  $H$ . С самосопряженным положительно определенным оператором  $\mathbf{G}$  свяжем гильбертово пространство  $H_{\mathbf{G}}^2$ , в котором скалярное произведение и норма есть

$$(U, V)_{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}U, V), \quad \|U\|_{\mathbf{G}} = \sqrt{(\mathbf{G}U, U)}.$$

Трехслойную операторно-разностную схему (4.57) запишем в виде двухслойной векторной схемы

$$\mathbf{B} \frac{Y^{n+1} - Y^n}{\tau} + \mathbf{A}Y^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

при соответствующем определении векторов  $Y^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Исходя из вышеизложенного, для каждого  $n = 1, 2, \dots$  определим вектор

$$Y^n = \left\{ \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), y_n - y_{n-1} \right\}. \quad (4.66)$$

В условиях теоремы 4.8 полученной выше оценке устойчивости по начальным данным (4.64) в этих обозначениях можно придать вид

$$\|Y^{n+1}\|_G \leq \|Y^n\|_G, \quad (4.67)$$

где

$$G_{11} = A, \quad G_{12} = G_{21} = 0, \quad G_{22} = R - \frac{1}{4}A. \quad (4.68)$$

С учетом (4.58) двухслойная векторная схема (4.65), (4.66) расписывается следующим образом:

$$B_{11} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + B_{12} \frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} + A_{11}u_n + A_{12}w_n = 0, \quad (4.69)$$

$$B_{21} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + B_{22} \frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} + A_{21}u_n + A_{22}w_n = 0. \quad (4.70)$$

Равенство (4.69) сопоставляется с трехслойной операторно-разностной схемой в форме (4.57). Принимая во внимание тождества

$$\frac{u_{n+1} + u_n}{2} = u_n + \frac{u_{n+1} - u_n}{2}, \quad 2(u_{n+1} - u_n) = w_{n+1} + w_n,$$

перепишем (4.57) в более удобном виде

$$\begin{aligned} B \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + R \frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} - \frac{1}{4}A(w_{n+1} - w_n) + \\ + \frac{\tau}{2}A \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + Au_n = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Для того чтобы от (4.69) перейти к (4.71), положим

$$B_{11} = B + \frac{\tau}{2}A, \quad B_{12} = \tau R - \frac{\tau}{4}A, \quad A_{11} = A, \quad A_{12} = 0. \quad (4.72)$$

Уравнение (4.70) не влияет на трехслойную схему (4.57). Ориентируясь на двухслойные операторно-разностные схемы (4.65) с самосопряженным оператором  $A$ , определим

$$B_{21} = -\tau Q, \quad B_{22} = \frac{\tau}{2}Q, \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = Q, \quad (4.73)$$

где  $Q$  — некоторый самосопряженный положительный оператор.

При выборе (4.72), (4.73) для операторов двухслойной разностной схемы (4.65) имеем представление

$$B = \frac{\tau}{2}A + Q, \quad (4.74)$$

где

$$Q_{11} = B, \quad Q_{12} = \tau R - \frac{\tau}{4}A, \quad Q_{21} = -\tau Q, \quad Q_{22} = 0. \quad (4.75)$$

На основе такой записи в условиях теоремы 4.8 устанавливается устойчивость операторно-разностной схемы (4.57), т. е. оценка (4.67), (4.68). Двухслойная векторная операторно-разностная схема (4.65) при самосопряженном и положительном операторе  $A$  устойчива по начальным данным в  $H_A^2$ , если

$$B \geq \frac{\tau}{2} A. \quad (4.76)$$

Принимая во внимание (4.74), условие (4.76) будет справедливо при

$$Q \geq 0.$$

Оно будет всегда выполнено для оператора  $Q$ , определяемого (4.75), при  $B \geq 0$  и выборе

$$Q = R - \frac{1}{4} A. \quad (4.77)$$

При (4.77) устойчивость в  $H_A^2$  соответствует выполнению (4.67), (4.68).

### 4.3.3. $\rho$ -устойчивость трехслойных схем

Допуская уменьшение или рост нормы разностного решения задачи, будем ориентироваться на  $\rho$ -устойчивые схемы, когда условие устойчивости по начальным данным имеет вид

$$\|Y^{n+1}\|_G \leq \rho \|Y^n\|_G, \quad (4.78)$$

где  $\rho > 0$ .

**Теорема 4.9.** Пусть в разностной схеме (4.57) операторы  $R$  и  $A$  являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B + \frac{\tau}{2} \frac{\rho - 1}{\rho + 1} A \geq 0, \quad A > 0, \quad R - \frac{1}{4} A > 0 \quad (4.79)$$

с  $\rho > 1$  имеет место априорная оценка (4.78), (4.68), т. е. операторно-разностная схема (4.57)  $\rho$ -устойчива по начальным данным.

*Доказательство.* Двухслойная векторная разностная схема (4.65)  $\rho$ -устойчива с  $\rho > 1$  при (см. теорему 4.4) выполнении неравенства

$$B \geq \frac{\tau}{\rho + 1} A. \quad (4.80)$$

Принимая во внимание (4.74), неравенство (4.80) переписывается в виде

$$Q + \frac{\tau}{2} \frac{\rho - 1}{\rho + 1} A \geq 0. \quad (4.81)$$

В условиях теоремы выполнение неравенства (4.81) проверяется непосредственно. ■



В несколько более общих условиях устанавливаются оценки  $\rho$ -устойчивости (4.78) с произвольным  $\rho > 0$  при использовании норм, зависящих от  $\rho$ . В операторно-разностной схеме (4.57) введем новые неизвестные  $y_n = \rho^n z_n$ , что дает

$$B \frac{\rho z_{n+1} - \rho^{-1} z_{n-1}}{2\tau} + R(\rho z_{n+1} - 2z_n + \rho^{-1} z_{n-1}) + Az_n = 0. \quad (4.82)$$

Схему (4.82) запишем в канонической форме

$$\tilde{B} \frac{z_{n+1} - z_{n-1}}{2\tau} + \tilde{R}(z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}) + \tilde{A}z_n = 0. \quad (4.83)$$

Непосредственные выкладки дают

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{\rho^2 + 1}{2} B + \tau(\rho^2 - 1)R, \\ \tilde{R} &= \frac{\rho^2 - 1}{4\tau} B + \frac{\rho^2 + 1}{2} R, \\ \tilde{A} &= \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A. \end{aligned} \quad (4.84)$$

На основании теоремы 4.8 при

$$\tilde{B} \geq 0, \quad \tilde{A} > 0, \quad \tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A} > 0 \quad (4.85)$$

имеет место устойчивость схемы (4.83) по начальным данным и верна оценка

$$\|Z^{n+1}\|_{\tilde{G}} \leq \|Z^n\|_{\tilde{G}}, \quad (4.86)$$

где (см. (4.66))

$$Z^n = \left\{ \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}), z_n - z_{n-1} \right\}.$$

С учетом этого определим теперь вектор

$$Y^n = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} y_n + z_{n-1} \right), \frac{1}{\rho} z_n - z_{n-1} \right\}. \quad (4.87)$$

Тогда оценка (4.86) примет вид

$$\|Y^{n+1}\|_{\tilde{G}} \leq \rho \|Y^n\|_{\tilde{G}}, \quad (4.88)$$

т. е. исходная разностная схема (4.57)  $\rho$ -устойчива по начальным данным.

Норма в (4.88) определяется оператором  $\tilde{G}$ , для которого

$$\tilde{G}_{11} = \tilde{A}, \quad \tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{21} = 0, \quad \tilde{G}_{22} = \tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}. \quad (4.89)$$

Условия устойчивости формулируются на основе (4.84), (4.85).

**Теорема 4.10.** Пусть в разностной схеме (4.67) операторы  $B$ ,  $R$  и  $A$  являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 + 1}{2} B + \tau(\rho^2 - 1)R &\geq 0, \\ \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A &> 0, \\ \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho + 1)^2 R - \rho A &> 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

с  $\rho > 0$  имеет место априорная оценка (4.87)–(4.89), т. е. разностная схема (4.57)  $\rho$ -устойчива по начальным данным в  $H_G^2$ .

#### 4.3.4. Оценки в более простых нормах

Устойчивость рассматриваемых операторно-разностных схем установлена в гильбертовых пространствах со сложной составной нормой (см. (4.61), (4.62)). При исследовании устойчивости трехслойных разностных схем получены также оценки устойчивости в более простых, чем (4.62), нормах. Достигается это за счет несколько более жестких условий устойчивости. Сформулируем соответствующий результат.

**Теорема 4.11.** Пусть в операторно-разностной схеме (4.57) операторы  $R$  и  $A$  являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B \geq 0, \quad A > 0, \quad R > \frac{1 + \varepsilon}{4} A \quad (4.91)$$

с  $\varepsilon > 0$  имеют место априорные оценки

$$\|y_{n+1}\|_A^2 \leq 2 \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} (\|y_0\|_A^2 + \|y_1 - y_0\|_R^2), \quad (4.92)$$

$$\|y_{n+1}\|_A^2 + \|y_n - y_{n-1}\|_R^2 \leq \frac{4 + 3\varepsilon}{\varepsilon} (\|y_0\|_A^2 + \|y_1 - y_0\|_R^2). \quad (4.93)$$

*Доказательство.* В используемых безындексных обозначениях  $y_n = y$ ,  $y_{n+1} = \hat{y}$ ,  $\hat{y} - y = \tau y_t$  для  $\mathcal{E}_{n+1}$ , определяемого согласно (4.62), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} &= \frac{1}{4} (A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) + \tau^2 (Ry_t, y_t) - \frac{\tau^2}{4} (Ay_t, y_t) = \\ &= (A\hat{y}, y) + \tau^2 (Ry_t, y_t). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Подстановка  $\hat{y} = y + \tau y_t$  в (4.94) дает

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} &= (Ay, y) + \tau(Ay, y_t) + \tau^2(Ry_t, y_t) \leq \\ &\leq \|y\|_A^2 + \tau\|y\|_A \cdot \|y_t\|_A + \tau^2\|y_t\|_R^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание третье неравенство (4.93), получим

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \|y\|_A^2 + \frac{2\tau}{(1+\varepsilon)^{1/2}}\|y\|_A \cdot \|y_t\|_R + \tau^2\|y_t\|_R^2 \leq 2(\|y\|_A^2 + \tau^2\|y_t\|_R^2).$$

Тем самым установлена оценка снизу для составной нормы

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq 2(\|y_n\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_R^2). \quad (4.95)$$

Оценка сверху устанавливается аналогично. Положим в (4.94)

$$y = \hat{y} - \tau y_t$$

и с учетом (4.91) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+1} &= (A\hat{y}, \hat{y}) - \tau(A\hat{y}, y_t) + \tau^2(Ry_t, y_t) \geq \|\hat{y}\|_A^2 - \tau\|\hat{y}\|_A \cdot \|y_t\|_A + \tau^2\|y_t\|_R^2 \geq \\ &\geq \|\hat{y}\|_A^2 - \frac{2\tau}{(1+\varepsilon)^{1/2}}\|\hat{y}\|_A \cdot \|y_t\|_R + \tau^2\|y_t\|_R^2. \end{aligned}$$

Для произвольного  $\beta > 0$  получим

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq (1-\beta)\|\hat{y}\|_A^2 + \left(1 - \frac{1}{\beta(1+\varepsilon)}\right)\tau^2\|y_t\|_R^2. \quad (4.96)$$

Полагая  $\beta = 1/(1+\varepsilon)$ , из (4.96) имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|y_{n+1}\|_A^2. \quad (4.97)$$

Принимая во внимание (4.95) и (4.97), из оценки устойчивости (4.61) получим доказываемую оценку (см. (4.92)) устойчивости трехслойной разностной схемы (4.57) в  $H_A$ .

Для доказательства оценки (4.93) положим  $\beta = (1+\varepsilon)^{-1/2}$ , так что

$$1-\beta = \frac{(1+\varepsilon)^{1/2}-1}{(1+\varepsilon)^{1/2}} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+(1+\varepsilon)^{1/2}}.$$

С учетом неравенства  $(1+\varepsilon)^{1/2} < 1+0,5\varepsilon$  от (4.96) приходим ко второй оценке составной нормы снизу

$$\mathcal{E}_{n+1} > \frac{2\varepsilon}{4+3\varepsilon}(\|y_{n+1}\|_A^2 + \|y_{n+1} - y_n\|_R^2). \quad (4.98)$$

Из (4.61), (4.95) и (4.98) вытекает оценка (4.93). ■

Оценки типа (4.92) естественны при рассмотрении трехслойных схем для эволюционных уравнений первого порядка (параболическое уравнение второго порядка), а оценки типа (4.93) — для уравнений второго порядка (гиперболическое уравнение второго порядка).

#### 4.3.5. Устойчивость по правой части

Приведем некоторые простейшие оценки устойчивости трехслойных операторно-разностных схем по начальным данным и правой части. Вместо (4.57) рассматривается схема

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = \varphi_n. \quad (4.99)$$

**Теорема 4.12.** Пусть в разностной схеме (4.99) операторы  $R$  и  $A$  являются самосопряженными. Тогда при выполнении условий

$$B \geq \varepsilon E, \quad A > 0, \quad R > \frac{1}{4}A \quad (4.100)$$

с постоянной  $\varepsilon > 0$  для разностного решения справедливы априорные оценки

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_1 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_k\|^2, \quad (4.101)$$

$$\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|\varphi_k\|_{B^{-1}}^2. \quad (4.102)$$

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 4.8 (см. (4.62)) получим равенство

$$\frac{1}{2\tau} (B(w_{n+1} + w_n), w_{n+1} + w_n) + \mathcal{E}_{n+1} = (\varphi_n, w_{n+1} + w_n) + \mathcal{E}_n.$$

Для получения оценки (4.101) при  $\varepsilon > 0$  в условиях (4.100) привлекается неравенство

$$(\varphi_n, w_{n+1} + w_n) \leq \frac{1}{2\tau} \varepsilon \|w_{n+1} + w_n\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi_n\|^2.$$

Неравенство

$$(\varphi_n, w_{n+1} + w_n) \leq \frac{1}{2\tau} \|w_{n+1} + w_n\|_B^2 + \frac{\tau}{2} \|\varphi_n\|_{B^{-1}}^2$$

используется при доказательстве оценки (4.102). ■

Некоторые другие оценки устойчивости трехслойных разностных схем (4.99) по правой части можно получить, ориентируясь на оценки (4.92), (4.93), при несколько более сильных ограничениях на оператор  $R$ .

## 4.4. Исследование разностных схем для модельной задачи

Общие результаты теории устойчивости операторно-разностных схем применяются для исследования устойчивости и сходимости разностных схем для модельной краевой задачи для одномерного параболического уравнения.

### 4.4.1. Условия устойчивости двухслойной схемы

Для приближенного решения краевой задачи (4.1)–(4.3) будем использовать двухслойную разностную схему (4.16), (4.17). Эта схема записывается в канонической форме двухслойных разностных схем (4.22), (4.23) при

$$B = E + \sigma \tau A, \quad A > 0. \quad (4.103)$$

Сформулируем условия устойчивости схемы (4.22), (4.103) в достаточно общих условиях, не предполагая самосопряженности оператора  $A$ .

**Теорема 4.13.** *Для устойчивости по начальным данным разностной схемы с весами (4.16), (4.17) в  $H$  необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства*

$$A^* + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau A^* A \geq 0. \quad (4.104)$$

*Доказательство.* В силу  $A > 0$  существует  $A^{-1}$ . Домножая (4.16) на  $A^{-1}$ , приходим от (4.22), (4.103) к разностной схеме

$$\tilde{B} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \tilde{A} y_n = \tilde{\varphi}_n, \quad t_n \in \omega_\tau,$$

в которой

$$\tilde{B} = A^{-1} + \sigma \tau E, \quad \tilde{A} = E.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости этой схемы по начальным данным в  $H = H_{\tilde{A}}$  (теорема 4.1) имеют вид неравенства

$$A^{-1} + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau E \geq 0.$$

Домножая его слева на  $A^*$ , справа — на  $A$  (неравенство при этом остается в силе), получим (4.104). ■

Для весов  $\sigma \geq 0,5$  операторно-разностная схема (4.22), (4.103) безусловно устойчива (устойчива при любых  $\tau > 0$ ).

При  $0 \leq \sigma < 0,5$  можно рассчитывать на условную устойчивость. Для получения ограничений на шаг сетки по времени в этом случае привлекается оценка оператора  $A$  сверху (см. лемму 2.2):

$$A \leq M_1 E, \quad M_1 = \frac{4}{h^2} \max_{1 \leq i \leq N-1} \frac{a_i + a_{i+1}}{2}. \quad (4.105)$$

Для самосопряженного оператора  $A$  неравенство (4.104) можно записать в виде

$$E + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau A \geq 0.$$

С учетом (4.105) имеем

$$E + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau A \geq \frac{1}{M_1} A + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau A \geq 0.$$

Поэтому условие устойчивости при  $0 \leq \sigma < 0,5$  будет выполнено, если

$$\tau \leq \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) \frac{1}{M_1}. \quad (4.106)$$

Тем самым (см. (4.105)) для схем с весовым множителем  $0 \leq \sigma < 0,5$  имеются жесткие ограничения на шаг по времени. В этом случае, как следует из (4.106), максимально допустимый шаг по времени  $\tau_{\max} = O(h^2)$ . И это является наиболее серьезным препятствием к использованию таких схем в вычислительной практике.

#### 4.4.2. Сходимость разностных схем

Основной вопрос теоретического обоснования используемых разностных схем состоит в доказательстве сходимости приближенного решения к точному при измельчении расчетной сетки. Основой такого рассмотрения является использование априорных оценок устойчивости по начальным данным и правой части.

Для исследования точности разностной схемы (4.16), (4.17) при приближенном решении задачи (4.1)–(4.3) запишем соответствующую задачу для погрешности. Для погрешности на временном слое  $t = t_n$  положим  $z_n = y_n - u_n$  и подставим  $y_n = z_n + u_n$  в (4.16), (4.17). Это приводит нас к задаче

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + A(\sigma z_{n+1} + (1 - \sigma)z_n) = \psi_n, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (4.107)$$

$$z_0 = 0, \quad x \in \omega. \quad (4.108)$$

В (4.107) правая часть  $\psi_n$  есть погрешность аппроксимации уравнения (4.1):

$$\psi_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + A(\sigma u_{n+1} + (1 - \sigma)u_n).$$

Аппроксимация по пространству и по времени обсуждалась выше. Для гладких коэффициентов, правой части уравнения (4.1) и начальных условий имеем

$$\psi_n = O(h^2 + \tau^{m(\sigma)}), \quad m(\sigma) = \begin{cases} 2, & \sigma = 0,5, \\ 1, & \sigma \neq 0,5. \end{cases} \quad (4.109)$$

Для оценки нормы погрешности привлекаются априорные оценки, выражающие устойчивость разностной схемы для погрешности (4.107), (4.108) по правой части. Схема (4.107), (4.108) записывается в каноническом виде

$$B \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + Az_n = \psi_n, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (4.110)$$

где оператор  $B$  определяется согласно (4.103).

С учетом (4.103) получим оценку разностного решения задачи (4.108), (4.110) на основе использования теоремы 4.7. В нашем случае неравенство (4.53) будет выполнено с  $G = E$  при выборе  $\sigma \geq 0,5$ . Соответствующая оценка для погрешности (см. (4.54)) будет иметь вид

$$\|z_{n+1}\|_A^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \tau \|\psi_k\|^2. \quad (4.111)$$

Принимая во внимание (4.108), на основе оценки (4.111) мы можем сделать вывод о том, что разностная схема с весами (4.16), (4.17) сходится со скоростью  $O(h^2 + \tau^{m(\sigma)})$  в  $H_A$  при  $\sigma \geq 0,5$ .

#### 4.4.3. Устойчивость трехслойных схем с весами

Для приближенного решения задачи (4.1)–(4.3) можно использовать трехслойную схему с весами (4.18), (4.19). Приведем условия устойчивости подобных схем, ограничившись случаем  $\theta = 0,5$  — схема (4.19), (4.20).

Схема (4.19), (4.20) записывается в каноническом виде (4.55), (4.56) при

$$B = E + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)A, \quad R = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A. \quad (4.112)$$

Будем рассматривать случай непостоянного положительного оператора  $A$  (в модельной задаче (4.13), (4.14)  $A = A^* > 0$ ).

**Теорема 4.14.** Если  $A > 0$  и выполнены условия

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > \frac{1}{2}, \quad (4.113)$$

тогда схема (4.19), (4.20) устойчива по начальным данным и для разностного решения (при  $\varphi = 0$ ) верна оценка

$$\|Y^{n+1}\|_* \leq \|Y_1\|_*, \quad (4.114)$$

где

$$\|Y^{n+1}\|_*^2 = \frac{1}{4} \|y_{n+1} + y_n\|^2 + \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2} \right) \|y_{n+1} - y_n\|^2.$$

*Доказательство.* Непосредственное использование результатов об устойчивости трехслойных операторно-разностных схем затруднительно из-за несамосопряженности оператора  $A$ . Поэтому начнем с предварительного преобразования разностной схемы.

Действуя на (4.19), (4.20) оператором  $A^{-1}$ , получим

$$\tilde{B} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \tilde{R}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \tilde{A}y_n = \tilde{\varphi}_n, \quad (4.115)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

где с учетом (4.112)

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= A^{-1} + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)E, \\ \tilde{R} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}E, \\ \tilde{A} &= E, \\ \tilde{\varphi} &= A^{-1}\varphi. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Применим к схеме (4.115), (4.116) теорему 4.8. При предположениях (4.113) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A} &= \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4} \right) \tau^2 E > 0, \\ \tilde{B} &= A^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau E \geq 0, \end{aligned}$$

которые обеспечивают устойчивость по начальным данным. Причем для решения задачи с однородной правой частью (при  $\varphi = 0$ ) верна оценка (4.114). ■

На основе оценок устойчивости по начальным данным и правой части исследуется сходимость трехслойных разностных схем типа (4.19), (4.20).



## 4.5. Программная реализация и примеры расчетов

Рассматривается краевая задача для квазилинейного параболического уравнения с нелинейной правой частью. При численном решении подобных задач основное внимание уделяется использованию линейных разностных схем. Представлены примеры численного решения модельных задач, которые иллюстрируют некоторые эффекты нелинейности.

### 4.5.1. Постановка задачи

Будем рассматривать краевые задачи для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t, u), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.117)$$

в котором коэффициенты зависят не только от пространственной переменной, но и от самого решения. Ограничимся случаем однородных краевых условий первого рода, так что

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.118)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.119)$$

Прежде всего отметим условия, при выполнении которых решение задачи (4.117)–(4.119) единственно. Исследование подобных проблем опирается на результаты о единственности решения соответствующей линейной задачи.

Пусть  $u(x, t)$  при  $0 < x < l$ ,  $0 < t \leq T$ , удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - c(x, t)u + f(x, t) \quad (4.120)$$

с непрерывными коэффициентами, причем  $a(x, t) > 0$ . На основе принципа максимума можно показать, что решение линейной задачи (4.118)–(4.120) единственно. Заметим, что это имеет место независимо от знака коэффициента  $c(x, t)$ .

Предположим, что существуют два решения  $u_\alpha(x, t)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , задачи (4.117)–(4.119):

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, u_\alpha) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right) + f(x, t, u_\alpha), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Для разности решений  $w(x) = u_2(x) - u_1(x)$  получим краевую задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, u_2) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial k}{\partial u}(x, \bar{u}) \frac{\partial u_1}{\partial x} w \right) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, t, \bar{u}) w, \quad (4.121)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.122)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.123)$$

Здесь использованы обозначения

$$\frac{\partial q}{\partial u}(x, \bar{u}) = \int_0^1 \frac{\partial q}{\partial u}(x, u_\theta) d\theta, \quad u_\theta = \theta u_2 + (1 - \theta) u_1.$$

Линейная краевая задача (4.121)–(4.123) принадлежит к отмеченному выше классу задач (4.118)–(4.120). Поэтому тривиальное решение  $w(x, t) = 0$  задачи (4.121)–(4.123) будет единственным при достаточной гладкости коэффициента  $k(x, u)$ , правой части  $f(x, t, u)$  и решений задачи (4.117)–(4.119).

#### 4.5.2. Линеаризованные разностные схемы

Выше мы рассматривали разностные схемы для линейного параболического уравнения. Среди них выделены абсолютно устойчивые двух- и трехслойные неявные разностные схемы. При использовании аналогичных схем для нелинейных задач мы можем сталкиваться с проблемой вычислительной реализации. При неявных аппроксимациях мы приходим к нелинейным разностным уравнениям на новом временном слое. Для нахождения приближенного решения приходится использовать те или иные итерационные методы решения систем нелинейных уравнений. Чтобы этого избежать, в вычислительной практике широко используются линеаризованные разностные схемы, в которых решение на новом слое находится из системы линейных уравнений. Некоторые возможности в этом направлении мы проиллюстрируем на примере построения разностных схем для нелинейной задачи (4.117)–(4.119).

На множестве сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}$  и обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , по аналогии с (4.11) определим оператор

$$A(v)y = -(a(x, v)y_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega.$$

Здесь коэффициенты  $a(x, v)$  задаются, например, в виде

$$a(x, v) = k(x - 0,5h, 0,5(v(x) + v(x - h))),$$

или

$$a(x, v) = \frac{1}{2}(k(x - h, v(x - h)) + k(x, v)).$$

Исходной дифференциальной задаче (4.117)–(4.119) ставится в соответствие дифференциально-разностная задача

$$\frac{dy}{dt} + A(y)y = f(x, t, y), \quad x \in \omega, \quad t > 0, \quad (4.124)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega. \quad (4.125)$$

Приведем некоторые разностные схемы для задачи (4.124), (4.125). Начнем с нелинейных разностных схем, в которых решение на каждом временном слое находится как решение нелинейной разностной задачи. Такие схемы строятся аналогично разностным схемам для линейного параболического уравнения. Например, чисто неявная разностная схема для (4.124), (4.125) имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_{n+1})y_{n+1} = f(x, t_{n+1}, y_{n+1}), \quad (4.126)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$y_0 = u_0(x), \quad x \in \omega. \quad (4.127)$$

В рассматриваемой нелинейной схеме (4.126), (4.127) для нахождения разностного решения на новом временном слое необходимо решать нелинейную разностную задачу. Для определения  $y_{n+1}$  используются те или иные итерационные процессы. Необходимо отметить некоторые важные особенности соответствующих нелинейных сеточных задач.

Первая особенность связана с тем, что при итерационной реализации неявных разностных схем имеется хорошее начальное приближение. В качестве начального приближения естественно брать решение на предыдущем слое. Второй и также благоприятный момент обусловлен тем, что сеточная задача для определения  $y_{n+1}$  содержит малый параметр — шаг по времени  $\tau$ . Этот параметр существенно влияет на скорость сходимости итерационного процесса (чем меньше  $\tau$ , тем выше скорость сходимости соответствующего итерационного процесса).

Можно также выделить класс линеаризованных разностных схем, которые характеризуются тем, что решение на новом временном слое находится из решения линейной разностной задачи. Простейшая из них характеризуется тем, что коэффициенты берутся с предыдущего временного слоя. Примером может служить разностная схема

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_n, y_{n+1}) = f(x, t_n, y_n). \quad (4.128)$$

Эта разностная схема имеет, очевидно, погрешность аппроксимации  $O(\tau + |h|^2)$ .

Основной недостаток схемы (4.128) часто связан с тем, что правая часть (источник) берется с нижнего временного слоя. Развитием разностной схемы (4.128) может служить схема с квазилинеаризацией правой части:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_n, y_{n+1}) &= \\ = f(x, t_{n+1}, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, t_{n+1}, y_n)(y_{n+1} - y_n). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Схема (4.129), оставаясь линейной, имеет большой запас устойчивости по нелинейной правой части.

Линеаризованные схемы могут строиться на основе разностных схем предиктор-корректора, которые в идейном плане примыкают к аддитивным разностным схемам (схемам расщепления). Ограничимся простейшим вариантом схемы предиктор-корректор.

$$\frac{\tilde{y}_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_n, y_n) = f(x, t_n, y_n). \quad (4.130)$$

Схема (4.130) используется для вычисления коэффициентов и правой части и поэтому этап коррекции может соответствовать использованию схемы:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(\tilde{y}_{n+1}, y_{n+1}) = f(x, t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}). \quad (4.131)$$

Этап коррекции может осуществляться, например, и на основе схемы линеаризации (4.129).

Приведенные схемы демонстрируют большие возможности по построению линеаризованных разностных схем. При прикладном математическом моделировании требуется проведение специальных методических исследований по выбору разностных схем для определенного класса нелинейных краевых задач. Теоретическое рассмотрение дает в нелинейных задачах зачастую лишь слабые ориентиры.

Естественно, что линеаризованные разностные схемы для задачи (4.124), (4.125) можно построить и на основе трехслойных разностных схем. Не останавливаясь на подробном описании, ограничимся лишь простейшими примерами. Для приближенного решения задачи (4.124), (4.125) будем использовать трехслойные симметричные разностные схемы

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + A(y_n, \sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = f(x, t_n, y_n) \quad (4.132)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. Эти линеаризованные схемы имеют второй порядок аппроксимации как по пространству, так и по времени.

### 4.5.3. Программа

Представим текст программы, в которой реализованы две линейризованные схемы: (4.128) и (4.129). Для нахождения решения на новом временном слое применяется стандартный алгоритм прогонки.

#### Программа PROBLEM3

```

C
C   PROBLEM3 - ОДНОМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА
C   КВАЗИЛИНЕЙНОЕ 1D ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C   PARAMETER ( ISHEME = 0, N = 1000, M = 1000 )
C   DIMENSION X(N+1), Y(N+1), A(N+1), B(N+1), C(N+1), F(N+1)
C   +           ,ALPHA(N+2), BETA(N+2)
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR   - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   ISHEME   - ПАРАМЕТР ДЛЯ ВЫБОРА СХЕМЫ,
C   N + 1    - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   M + 1    - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C
C   XL = 0.DO
C   XR = 10.DO
C   TMAX = 2.5DO
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H = (XR - XL) / N
C   TAU = TMAX / M
C   DO I = 1, N+1
C     X(I) = XL + (I-1)*H
C   END DO
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
C   T = 0.DO
C   XD = 2.5DO
C   DO I = 1, N+1
C     Y(I) = 0.DO
C     IF (X(I).LT.XD) Y(I) = 1.DO
C   END DO
C   WRITE ( 01, * ) T
C   WRITE ( 01, * ) (Y(I),I=1,N+1)
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННЫЙ СЛОЙ
C
C   DO K = 1, M
C     T = K*TAU

```

```

C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
C      IF (IScheme.EQ.0) THEN
C
C      ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СХЕМА С ЯВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ
C
C      DO I = 2, N
C         X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
C         X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
C         U1 = (Y(I) + Y(I-1)) / 2
C         U2 = (Y(I+1) + Y(I)) / 2
C         A(I) = AK(X1,U1) / (H*H)
C         B(I) = AK(X2,U2) / (H*H)
C         C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
C         F(I) = Y(I) / TAU + AF(X(I),T,Y(I))
C      END DO
C      END IF
C      IF (IScheme.EQ.1) THEN
C
C      ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СХЕМА С КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЕЙ ПО ПРАВОЙ ЧАСТИ
C
C      DO I = 2, N
C         X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
C         X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
C         U1 = (Y(I) + Y(I-1)) / 2
C         U2 = (Y(I+1) + Y(I)) / 2
C         A(I) = AK(X1,U1) / (H*H)
C         B(I) = AK(X2,U2) / (H*H)
C         C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU - ADF(X(I),T,Y(I))
C         F(I) = Y(I) / TAU + AF(X(I),T,Y(I)) - ADF(X(I),T,Y(I))*Y(I)
C      END DO
C      END IF
C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ
C
C         B(1) = 0.DO
C         C(1) = 1.DO
C         F(1) = 1.DO
C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОМ КОНЦЕ
C
C         A(N+1) = 0.DO
C         C(N+1) = 1.DO
C         F(N+1) = 0.DO
C
C      РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
C         CALL PROG ( N+1, A, C, B, F, ALPHA, BETA, Y )
C
C      ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ В ФАЙЛ
C

```

```

      IF (K/200*200.EQ.K) THEN
        WRITE ( 01, * ) T
        WRITE ( 01, * ) (Y(I),I=1,N+1)
      END IF
    END DO
C
    CLOSE ( 01 )
    STOP
    END
C
    SUBROUTINE PROG ( N, A, C, B, F, AL, BET, Y )
    IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
    МЕТОД ПРОГОНКИ
C
    DIMENSION A(N), C(N), B(N), F(N), Y(N), AL(N+1), BET(N+1)
C
    AL(1) = B(1) / C(1)
    BET(1) = F(1) / C(1)
    DO I = 2, N
      SS = C(I) - AL(I-1)*A(I)
      AL(I) = B(I) / SS
      BET(I) = (F(I) + BET(I-1)*A(I)) / SS
    END DO
    Y(N) = BET(N)
    DO I = N-1, 1, -1
      Y(I) = AL(I)*Y(I+1) + BET(I)
    END DO
    RETURN END

    DOUBLE PRECISION FUNCTION AK ( X, U )
    IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
    КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ
C
    AK = 0.2D0
C
    RETURN END

    DOUBLE PRECISION FUNCTION AF ( X, T, U )
    IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
    ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ
C
    AF = 5.D0*U*(1.D0 - U)
C
    RETURN END

    DOUBLE PRECISION FUNCTION ADF ( X, T, U )
    IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

```

```

C
C      ПРОИЗВОДНАЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ
C
C      ADF = 5.D0-10.D0*U
C
C      RETURN
C      END

```

Приведенный текст программы соответствует решению уравнения (4.117) с коэффициентами

$$k(x, u) = \kappa, \quad f(x, t, u) = \chi u(1 - u), \quad (4.133)$$

причем  $\kappa = 0,2$ ,  $\chi = 5$ . Такое нелинейное уравнение диффузии-реакции известно как уравнение Фишера (уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова).

#### 4.5.4. Примеры расчетов

Нелинейность порождает многие новые эффекты, связанные с необычным поведением решения задачи. Это относится и к квазилинейно-

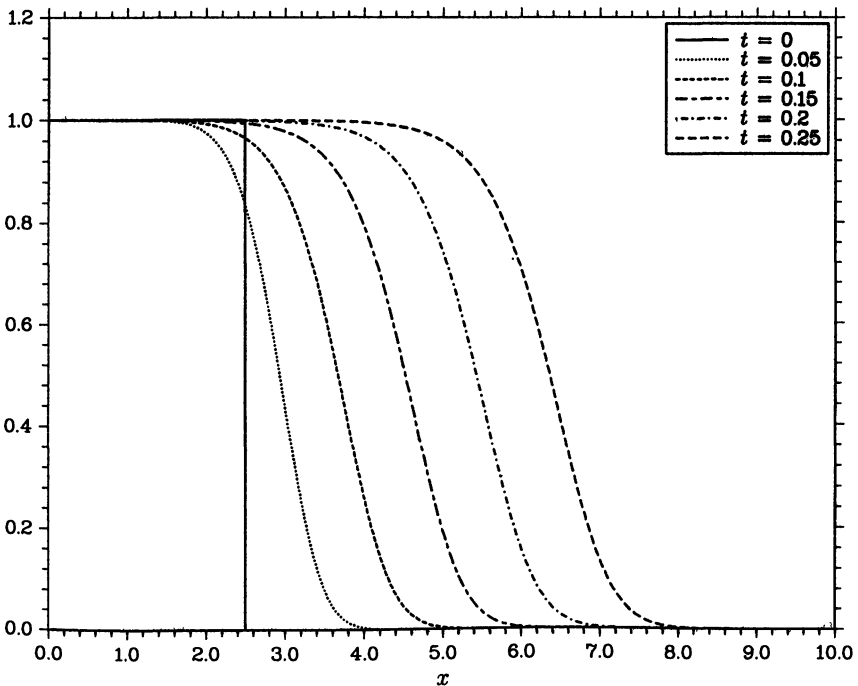


Рис. 4.1. Решение на различные моменты времени



му параболическому уравнению (4.117). В качестве характерного примера выступает уравнение Фишера (4.117), (4.133).

Для линейного уравнения параболического типа (4.1) характерна бесконечная скорость распространения возмущений. При рассмотрении уравнений с нелинейными коэффициентами и правыми частями можно выделить решения с конечной скоростью возмущений. Для уравнения Фишера (4.117), (4.133) существуют решения типа бегущей волны, когда

$$u(x, t) = \psi(\xi), \quad \xi = x - ct,$$

где  $c = \text{const}$  — скорость волны.

А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский и Н. С. Пискунов показали, например, что при

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < x^*, \\ 0, & x > x^*, \end{cases}$$

решение задачи Коши для уравнения (4.117), (4.133) единственно и это решение имеет вид волны, бегущей со скоростью  $c = 2\sqrt{\kappa\chi}$ .

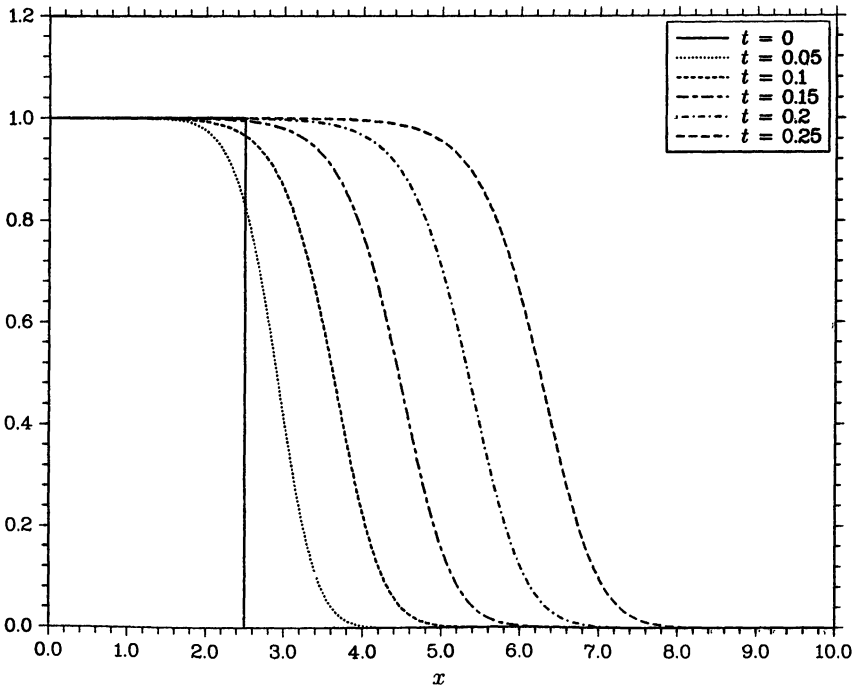


Рис. 4.2. Разностная схема без линеаризации правой части

На рис. 4.1 представлено решение краевой задачи для уравнения (4.117), (4.133) при  $\kappa = 0,2$ ,  $\chi = 5$  с краевыми и начальными условиями

$$u(0, t) = 1, \quad u(10, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < x^*, \\ 0, & x > x^*, \end{cases} \quad 0 < x < 10,$$

с  $x^* = 2,5$ .

Использовалась достаточно подробная расчетная сетка с  $h = 0,01$ ,  $\tau = 0,0025$  и схема (4.129). Наблюдается перестройка первоначально прямоугольного начального профиля и формирование уединенной волны, распространяющейся вправо.

Некоторые особенности схем с линейризацией по нелинейной правой части и без линейризации показаны на рис. 4.2, 4.3. Здесь представлены расчеты с использованием более крупного шага по времени ( $\tau = 0,025$ ) при использовании линейризованных схем (4.128) (рис. 4.2) и (4.129) (рис. 4.3). Схема с явной правой частью дает более точные

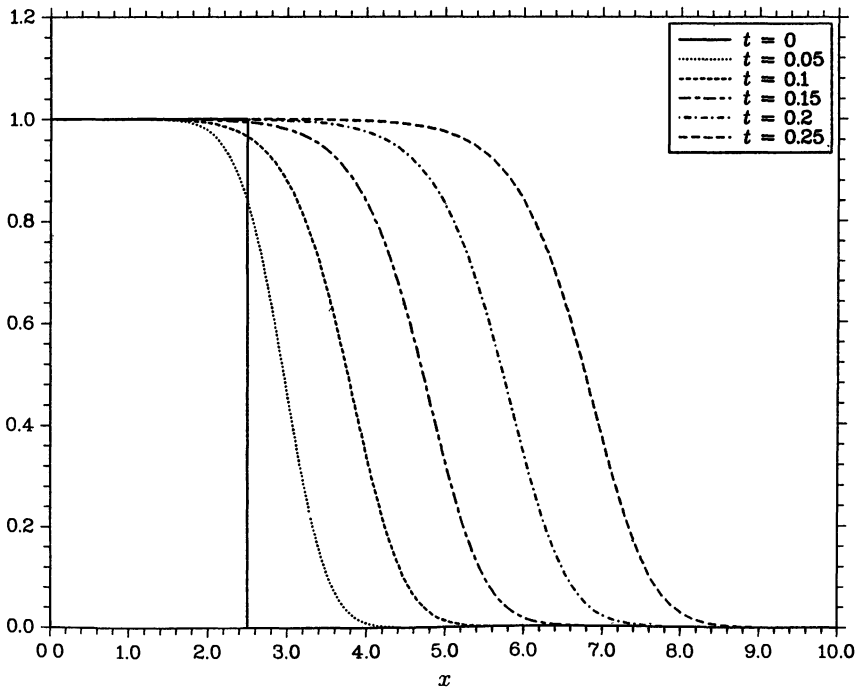


Рис. 4.3. Разностная схема с линейризацией правой части

результаты, в то время как схема с частичным выносом правой части на новый временной слой приводит к тому, что фронт приближенного решения движется несколько быстрее. Необходимо отметить, что этот вывод о некоторых преимуществах схемы без линеаризации относится только к рассмотренной задаче — в других условиях может лучше работать схема с линеаризацией.

## 4.6. Задачи и упражнения

**4.1.** Рассмотрите задачу Коши для эволюционного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Au = f(t), \quad t > 0, \quad (4.134)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0. \quad (4.135)$$

Покажите, что при  $A = A^* > 0$  для решения задачи (4.134), (4.135) верна априорная оценка

$$\|u(t)\|_*^2 \leq e^t \left( \|u_0\|_A^2 + \|v_0\|^2 + \int_0^t \exp\{-\theta\} \|f(\theta)\|^2 d\theta \right),$$

где

$$\|u\|_*^2 = \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 + \|u\|_A^2.$$

**4.2.** Постройте двухслойную разностную схему с весами для задачи с граничными условиями третьего рода (4.1), (4.3), (4.4).

**4.3.** Ищется приближенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

дополненное условиями (4.2), (4.3). Постройте двухслойную схему с погрешностью аппроксимации  $O(\tau^2 + h^4)$ .

**4.4.** В классе трехслойных схем с весами

$$\begin{aligned} & \left( \theta \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (1 - \theta) \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} \right) + \\ & + A(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y_n + \sigma_2 y_{n-1}) = \varphi_n, \end{aligned}$$

выделите схему с погрешностью аппроксимации  $O(\tau^3)$ .

**4.5.** Докажите теорему 4.2.

**4.6.** Установите условия устойчивости схемы

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2\tau} + Ay_{n+1} = 0$$

при  $A = A^* > 0$ .

**4.7.** Пусть при исследовании схем с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = \varphi_n \quad (4.136)$$

установлена устойчивость по начальным данным и правой части чисто неявной схемы ( $\sigma = 1$ ). Покажите, что в этом случае устойчивыми будут все схемы с  $\sigma > 1$ .

**4.8.** Пусть в схеме

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n, \quad t_n \in \omega_\tau, \\ y_0 = u_0$$

с постоянным оператором  $A = A^* > 0$  выполнено неравенство

$$B \geq \frac{\tau}{2} A.$$

Покажите, что для решения имеет место оценка устойчивости по начальным данным и правой части

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|u_0\|_A + \|\varphi_0\|_{A^{-1}} + \|\varphi_n\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^n \tau \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|.$$

**4.9.** На основе принципа максимума для разностных схем установите условия устойчивости в  $C(\omega)$  схемы с весами (4.136) с

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega,$$

при решении краевой задачи (4.1)–(4.3).

**4.10.** Исследуйте сходимость трехслойной симметричной схемы

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + A(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = \varphi_n,$$

при решении краевой задачи (4.1)–(4.3).

**4.11.** При решении задачи (4.134), (4.135) естественно использовать схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} + A(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y_n + \sigma_2 y_{n-1}) = \varphi_n,$$

$$n = 1, 2, \dots, N_0 - 1.$$

Получите условия устойчивости этой схемы.

**4.12.** Модифицируйте программу PROBLEM3, включив в нее реализацию трехслойной разностной схемы (4.132). Проведите вычислительные эксперименты по использованию такой схемы для приближенного решения модельной задачи для уравнения (4.117), (4.133).

**4.13.** Постройте автомодельное решение типа бегущей волны для уравнения (4.117) с коэффициентами

$$k(x, u) = u^\sigma, \quad f(x, t, u) = 0.$$

Проведите численные эксперименты по моделированию таких режимов с использованием программы PROBLEM3.

**4.14.** Проведите численные эксперименты по развитию локализованных возмущений в задаче Коши для уравнения (4.117), когда

$$k(x, u) = u^\sigma, \quad f(x, t, u) = u^{\sigma+1}.$$

**4.15.** На основе программы PROBLEM2 для численного решения сеточных эллиптических уравнений напишите программу для численного решения линейной краевой задачи Дирихле для двумерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

в прямоугольнике

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

## Глава 5

---

# Методы решения некорректных задач

Основные подходы к приближенному решению некорректных задач связаны с тем или иным возмущением исходной задачи, переходом к некоторой «близкой», но уже корректной задаче. На этом пути мы получаем различные алгоритмы регуляризации. На примере операторного уравнения первого порядка отмечаются основные подходы к решению неустойчивых задач. В частности, переход к корректной задаче может осуществляться за счет возмущения исходного уравнения, перехода к вариационной задаче и т. д. Важнейшее значение имеет проблема выбора параметра регуляризации, его согласование с погрешностями во входных данных. Иллюстративные расчеты проведены для интегрального уравнения первого рода.

### 5.1. Метод регуляризации А. Н. Тихонова

Рассматривается общий подход к построению устойчивых вычислительных алгоритмов приближенного решения некорректных задач, предложенный А. Н. Тихоновым. Метод основан на переходе от исходного уравнения первого рода к задаче минимизации функционала с дополнительным стабилизирующим слагаемым.

#### 5.1.1. Постановка задачи

Изложение методов численного решения некорректных задач обычно проводится применительно к линейному операторному уравнению первого рода

$$Au = f. \tag{5.1}$$

Правая часть и само решение принадлежат тем или иным метрическим пространствам. Для того чтобы не усложнять наше рассмотрение техническими деталями, ограничимся случаем линейного оператора  $A$ ,

действующего в гильбертовом пространстве  $H$  (будем считать для простоты, что  $u \in H$ ,  $f \in H$ , т. е.  $A: H \rightarrow H$ ).

В  $H$  введено скалярное произведение  $(u, v)$  и норма  $\|u\|$  для элементов  $u, v \in H$ . Предположим, что оператор  $A$  самосопряжен, положителен и, вообще говоря, неограничен, а его область определения  $D(A)$  плотна в  $H$ . Будем для простоты считать, что спектр оператора  $A$  дискретный и состоит из собственных значений  $\lambda_k$ , стремящихся к нулю при  $k \rightarrow \infty$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots > 0$ ), а соответствующая система собственных функций  $\{w_k\}$ ,  $w_k \in D(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормирована и полна в  $H$ . Поэтому для каждого  $v \in H$  справедливо

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k, \quad v_k = (v, w_k).$$

В прикладных исследованиях типичной является ситуация с заданием входных данных с погрешностью. Эту общую ситуацию промоделируем предположением, что правая часть уравнения (5.1) задана с погрешностью  $\delta$ . Вместо  $f$  нам известно  $f_\delta$  такое, что

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta. \quad (5.2)$$

В более общем случае мы должны ориентироваться на задачи (5.1), в которых приближенно задана не только правая часть, но и оператор задачи  $A$ .

Ставится задача нахождения приближенного решения уравнения (5.1) с приближенно заданной правой частью  $f_\delta$ . Это приближенное решение будем обозначать  $u_\alpha$ , причем параметр  $\alpha$  естественно связать с уровнем погрешностей в задании правой части, т. е.  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

### 5.1.2. Вариационный метод

Основная идея построения устойчивых методов решения некорректных задач базируется на использовании априорной информации о неточности во входных данных. Раз правая часть задана с погрешностью, то и не нужно пытаться решить уравнение

$$A u_\alpha = f_\delta \quad (5.3)$$

точно. Неопределенность в правой части можно попытаться компенсировать, например, за счет перехода к некоторой другой, но уже корректной задаче

$$A_\alpha u_\alpha = f_\delta,$$

в которой оператор  $A_\alpha$  обладает лучшими свойствами, чем  $A$ .

В вариационных методах вместо решения уравнения (5.3) минимизируется норма невязки  $r = Av - f_\delta$ , т. е. минимизируется функционал невязки

$$J_0(v) = \|Av - f_\delta\|^2.$$

Существует много решений такой вариационной задачи, которые с точностью  $\delta$  удовлетворяют уравнению (5.3). Необходимо только разумно распорядиться информацией о погрешности в задании правой части с тем, чтобы выделить наиболее приемлемое решение.

В соответствии с методом регуляризации А. Н. Тихонова вводится **сглаживающий функционал**

$$J_\alpha(v) = \|Av - f_\delta\|^2 + \alpha\|v\|^2. \quad (5.4)$$

Приближенное решение  $U_\alpha$  исходной задачи (5.1), (5.2) есть экстремаль этого функционала:

$$J_\alpha(u_\alpha) = \min_{v \in H} J_\alpha(v). \quad (5.5)$$

В (5.4)  $\alpha > 0$  — **параметр регуляризации**, величина которого согласуется с погрешностью задания правой части  $\delta$ . Для выделения ограниченного решения в функционал невязки добавлен **стабилизирующий функционал**  $\|v\|^2$ .

Основной вопрос теоретического исследования приближенных алгоритмов связан с доказательством сходимости приближенного решения к точному. Необходимо указать, при каких условиях приближенное решение  $u_\alpha$ , определяемое из (5.4), (5.5), сходится к точному решению задачи (5.1). В идеале, необходимо не только установить факт сходимости, но и указать скорость сходимости.

Представим приближенное решение в операторном виде

$$u_\alpha = R(\alpha)f_\delta. \quad (5.6)$$

Если это приближенное решение сходится к точному при стремлении к нулю погрешности правой части, то в этом случае говорят, что оператор  $R(\alpha)$  является **регуляризирующим**. При выбранной конструкции оператора  $R(\alpha)$  необходимо указать и выбор параметра регуляризации  $\alpha$  в зависимости от  $\delta$ .

### 5.1.3. Сходимость метода регуляризации

При исследовании условно корректных задач необходимо выделить класс искомых решений, явно указать априорные ограничения на решение. В задаче (5.1), (5.2) нас будут интересовать ограниченные решения, тем самым априорные ограничения на решение есть

$$\|u\| \leq M, \quad (5.7)$$

где  $M = \text{const} > 0$ . Основной результат формулируется в виде следующего утверждения.

**Теорема 5.1.** Пусть для погрешности правой части выполнена оценка (5.2). Тогда приближенное решение  $u_\alpha$ , определяемое как решение задачи (5.4), (5.5),



при  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  сходится в  $H$  к ограниченному точному решению и при  $\delta \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* При наших предположениях об операторе  $A$  точное решение уравнения (5.1) представляется в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (f, w_k) w_k. \quad (5.8)$$

Пусть

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k, \quad c_k = (v, w_k),$$

тогда функционал  $J_\alpha(v)$  принимает вид

$$J_\alpha(v) = \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda_k c_k - (f_\delta, w_k))^2 + \alpha c_k^2).$$

Условие (5.5) эквивалентно

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial c_k} = 2\lambda_k (\lambda_k c_k - (f_\delta, w_k)) + 2\alpha c_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует представление для решения задачи (5.4), (5.5)

$$u_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \alpha} (f_\delta, w_k) w_k. \quad (5.9)$$

Для погрешности  $z = u_\alpha - u$  используем представление

$$z = z_1 + z_2, \quad z_1 = u_\alpha - R(\alpha)f, \quad z_2 = R(\alpha)f - u. \quad (5.10)$$

Здесь  $R(\alpha)f$  есть решение задачи минимизации сглаживающего функционала при точном задании правой части.

С учетом (5.8), (5.9) получим

$$\|z_1\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \alpha)^2} ((f_\delta, w_k) - (f, w_k))^2.$$

Для неотрицательных  $x$  имеем

$$\frac{x}{x^2 + \alpha} = \frac{1}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\alpha}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{\alpha}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}},$$

и поэтому при предположениях (5.2)

$$\|z_1\|^2 \leq \frac{1}{4\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} ((f_{\delta}, w_k) - (f, w_k))^2 \leq \frac{\delta^2}{4\alpha}. \quad (5.11)$$

Оценка (5.11) выражает устойчивость решения задачи (5.4), (5.5) по отношению к малым возмущениям правой части.

Оценим теперь  $z_2$  в представлении (5.10) для погрешности приближенного решения. В этом случае речь идет об условиях близости решений уравнения (5.1) и задачи минимизации сглаживающего функционала при одной и той же точной правой части. Из (5.8), (5.9) имеем

$$\|z_2\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 + \alpha)^2} (f, w_k)^2.$$

Близость  $R(\alpha)f$  к  $u$  установим для функций из класса (5.7). Покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\alpha(\varepsilon)$  такое, что  $\|z_2\|^2 \leq \varepsilon$  для всех  $0 < \alpha \leq \alpha(\varepsilon)$ . Для функций из класса (5.7) ряд

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, w_k)^2$$

сходится, и поэтому найдется  $n(\varepsilon)$  такое, что

$$\sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, w_k)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

В этих условиях получим неравенство

$$\|z_2\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\alpha^2}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 + \alpha)^2} (f, w_k)^2 + \sum_{k=n(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, w_k)^2.$$

За счет выбора достаточно малого  $\alpha(\varepsilon)$  для первого слагаемого получим

$$\sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} \frac{\alpha^2}{\lambda_k^2(\lambda_k^2 + \alpha)^2} (f, w_k)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это неравенство будет иметь место для всех  $0 < \alpha \leq \alpha(\varepsilon)$ . Тем самым  $s(\alpha) = \|z_2\| \rightarrow 0$ , если  $\alpha \rightarrow 0$ .

Подстановка в (5.10) дает

$$\|z\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + s(\alpha). \quad (5.12)$$

В силу этого, если  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то  $\|z\| \rightarrow 0$ . ■

Доказанная теорема имеет место и в более общих условиях. Принципиальным обобщением является рассмотрение задачи (5.1), (5.2) в условиях, когда оператор  $A$  не является самосопряженным.

## 5.2. Скорость сходимости метода регуляризации

В классе ограниченных решений выше установлен факт сходимости приближенного решения к точному в методе регуляризации А. Н. Тихонова. При более жестких априорных ограничениях на точное решение удается получить оценки скорости сходимости метода регуляризации.

### 5.2.1. Уравнение Эйлера для сглаживающего функционала

Вместо экстремальной задачи (5.4), (5.5) можно решать соответствующее уравнение Эйлера. В этом случае приближенное решение определяется из решения уравнения второго рода:

$$A^* A u_\alpha + \alpha u_\alpha = A^* f_\delta. \quad (5.13)$$

Переход к корректной задаче (5.13) от некорректной (5.3) осуществляется за счет перехода к задаче с самосопряженным оператором  $A^* A$ , домножая (5.3) слева на  $A^*$ , и его последующем возмущении оператором  $\alpha E$ .

Отмеченная эквивалентность задачи минимизации (5.4), (5.5) и уравнения (5.13) дает определенную свободу при вычислительной реализации. Вариационный подход имеет большую общность, он позволяет с единых методологических позиций рассмотреть различные классы задач. Для нахождения численного решения часто удобнее ориентироваться на соответствующее уравнение Эйлера.

При  $A = A^* \geq 0$  можно ограничиться возмущением самого оператора:

$$A u_\alpha + \alpha u_\alpha = f_\delta. \quad (5.14)$$

Задача (5.14) соответствует использованию алгоритма **упрощенной регуляризации**.

Фактически можно говорить, что помимо вариационных методов решения некорректных задач можно выделить второй класс приближенных методов, которые (см., например, (5.13), (5.14)) характеризуются возмущением оператора исходной или преобразованной задачи.

### 5.2.2. Классы априорных ограничений на решение

Мы рассмотрели метод регуляризации А. Н. Тихонова в предположении (5.7) о точном решении некорректной задачи (5.1), (5.2). Для погрешности решения получена оценка (5.12), в которой  $s(\alpha) \rightarrow 0$ , если параметр регуляризации  $\alpha \rightarrow 0$ . Заметим, что сходимость устанавливается в той же норме, в которой формулируются априорные ограничения на решение. Хотелось бы получить оценку, которая конкретизировала бы скорость сходимости приближенного решения при  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  и  $\delta \rightarrow 0$ .

Для того чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим задачу приближенного вычисления производной. Будем использовать разностное отношение

$$u_x^\circ = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, \quad (5.15)$$

предполагая, что функция  $u(x)$  дифференцируема для всех  $x$ . Нас интересует вопрос о том, как хорошо разностная производная (5.15) приближает  $du/dx$  в точке  $x$ .

Для доказательства сходимости, получения оценок скорости сходимости центральной разностной производной (5.15) к  $du/dx$  сформулируем более жесткие ограничения на функцию  $u(x)$ . Если, например, функция  $u(x)$  дважды дифференцируемая, то из (5.15) получим

$$u_x^\circ = \frac{du}{dx} + O(h),$$

для трижды дифференцируемой функции

$$u_x^\circ = \frac{du}{dx} + O(h^2).$$

Тем самым, с уменьшением гладкости дифференцируемых функций погрешность аппроксимации падает.

Аналогичная ситуация имеет место и при исследовании скорости сходимости метода регуляризации. Вместо (5.17) сформулируем более сильные ограничения на точное решение задачи (5.1). Требования повышенной гладкости точного решения естественно связать с оператором  $A$ . Будем считать, что точное решение принадлежит классу

$$\|A^{-1}u\| \leq M. \quad (5.16)$$

В рассматриваемом случае самосопряженного и положительного оператора  $A$  промежуточное (между (5.7) и (5.16)) положение занимает класс априорных ограничений на решение типа

$$\|u\|_{A^{-1}} \leq M. \quad (5.17)$$

В условиях (5.16), (5.17) можно попытаться конкретизировать зависимость  $s(\alpha)$  в оценке погрешности типа (5.12) для метода регуляризации.

### 5.2.3. Оценки скорости сходимости

Оценки для погрешности метода регуляризации А. Н. Тихонова мы получим на основе априорных оценок для операторного уравнения (5.13), которое с учетом  $A = A^* > 0$  принимает вид

$$A^2 u_\alpha + \alpha u_\alpha = A f_\delta. \quad (5.18)$$

**Теорема 5.2.** Для погрешности приближенного решения задачи (5.1), (5.2), определяемого из (5.13), справедлива априорная оценка

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2} M^2 \quad (5.19)$$

для точных решений из класса (5.16) и

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} M^2 \quad (5.20)$$

для решений удовлетворяющих (5.17).

*Доказательство.* Вычитая из (5.18) уравнение

$$A^2 u = A f,$$

получим следующее уравнение для погрешности  $z = u_\alpha - u$ :

$$A^2 z + \alpha z = A(f_\delta - f) - \alpha u.$$

Скалярно домножим его на  $z$ , что дает

$$\|Az\|^2 + \alpha \|z\|^2 = ((f_\delta - f), Az) - \alpha(u, z).$$

Подстановка неравенства

$$((f_\delta - f), Az) \leq \frac{1}{2} \|Az\|^2 + \frac{1}{2} \|f_\delta - f\|^2$$

дает

$$\frac{1}{2} \|Az\|^2 + \alpha \|z\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f_\delta - f\|^2 - \alpha(u, z). \quad (5.21)$$

Рассмотрим вначале случай априорных ограничений (5.16). Использование неравенства

$$-\alpha(u, z) = -\alpha(A^{-1}u, Az) \leq \frac{1}{2} \|Az\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|A^{-1}u\|^2$$

в (5.21) приводит нас к оценке

$$\alpha \|z\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f_\delta - f\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \|A^{-1}u\|^2.$$

С учетом (5.2) и (5.16) приходим к доказываемой оценке (5.19).

В случае (5.17) последнее слагаемое в правой части (5.21) оцениваем следующим образом:

$$-\alpha(u, z) = -\alpha(A^{-1/2}u, A^{1/2}z) \leq \sqrt{\alpha}\|A^{1/2}z\|^2 + \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{4}\|A^{-1/2}u\|^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2}\|Az\|^2 + \alpha\|z\|^2 - \sqrt{\alpha}\|A^{1/2}z\|^2 = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}Az - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}z \right\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|z\|^2,$$

получим

$$\frac{\alpha}{2}\|z\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f_\delta - f\|^2 + \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{4}\|A^{-1/2}u\|^2.$$

С учетом (5.2), (5.17) имеем оценку (5.20). ■

Повышение требований на гладкость точного решения приводит к повышению скорости сходимости приближенного решения к точному (см. оценки (5.19), (5.20)).

## 5.3. Выбор параметра регуляризации

Отмечаются некоторые основные способы выбора параметра регуляризации, который должен согласовываться с погрешностью входных данных.

### 5.3.1. Выбор в классе априорных ограничений на решение

В теории методов приближенного решения некорректных задач вопросу выбора параметра регуляризации уделяется значительное внимание. Наибольшее распространение получили: выбор параметра регуляризации по невязке, обобщенной невязке (при учете погрешности в задании не только правой части, но и оператора  $A$ ), квазиоптимальный выбор и т. д. Выбор оптимального значения параметра регуляризации во многом определяет работоспособность вычислительного алгоритма.

Параметр регуляризации  $\alpha$  согласовывается с погрешностью входных данных, и чем меньше погрешность, тем меньшим берется параметр регуляризации, т. е.  $\alpha = \alpha(\delta)$ . В соответствии со структурой погрешности (см. (5.12), (5.19), (5.20)) мы не можем брать слишком малый параметр регуляризации — поскольку при уменьшении параметра регуляризации растет погрешность и проявляется некорректность задачи. Тем самым, имеется некоторый оптимум для параметра регуляризации, при котором погрешность приближенного решения минимальна.

**Оптимальный параметр регуляризации** зависит не только от величины погрешности в задании правой части, но и от класса априорных ограничений на точное решение. Так например, для ограниченных решений (класс (5.7)) полученная выше оценка (5.12) для погрешности приближенного решения в методе А. Н. Тихонова не позволяет явно указать оптимальное значение параметра регуляризации.

При сужении класса точных решений мы имеем возможность конкретизировать выбор параметра регуляризации. В классе точных решений (5.16) для погрешности имеет место априорная оценка (5.19) и для оптимального значения параметра регуляризации получим выражение

$$\alpha_{\text{опт}} = \frac{\delta}{M}, \quad \|A^{-1}u\| \leq M. \quad (5.22)$$

При таком выборе параметра регуляризации достигается следующая скорость сходимости приближенного решения к точному:

$$\|z\| \leq \sqrt{M\delta}.$$

Аналогичное рассмотрение выбора параметра регуляризации в классе априорных ограничений на точное решение (5.17) приводит нас к

$$\alpha_{\text{опт}} = \left(4 \frac{\delta^2}{M^2}\right)^{2/3}, \quad \|u\|_{A^{-1}} \leq M; \quad (5.23)$$

при этом

$$\|z\| \leq \sqrt{3} \left(\frac{M^2\delta}{4}\right)^{1/3}.$$

Подводя итоги, можем сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 5.3.** *При выборе оптимального значения параметра регуляризации по правилу (5.22) в классе точных решений (5.16) и по правилу (5.23) в классе (5.17) для погрешности приближенного решения имеем*

$$\|z\| = O(\delta^\beta), \quad \beta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \|A^{-1}u\| \leq M, \\ \frac{1}{3}, & \|u\|_{A^{-1}} \leq M. \end{cases} \quad (5.24)$$

Оптимальный выбор параметра регуляризации проводится при условии, что известен уровень погрешности в задании правой части (постоянная  $\delta$  в (5.2)) и класс априорных ограничений на точное решение (постоянная  $M$  в оценке (5.16) или (5.17)). При решении практических задач такая априорная информация частично или даже полностью отсутствует. Поэтому приходится ориентироваться и на другие способы выбора регуляризации. Отметим некоторые возможности в этом направлении.

### 5.3.2. Метод невязки

При выборе параметра регуляризации по невязке в качестве определяющего уравнения выступает равенство

$$\|Au_\alpha - f_\delta\| = \delta. \quad (5.25)$$

Обоснование такого выбора параметра регуляризации, т. е. сходимости приближенного решения  $u_\alpha$  с  $\alpha = \alpha(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$  к точному решению уравнения (5.1), дано для многих классов задач. Мы отметим лишь особенности вычислительной реализации такого способа определения параметра регуляризации.

Невязка зависит некоторым образом от параметра регуляризации  $\alpha$ . Обозначим

$$\varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - f_\delta\|,$$

тогда нахождение параметра регуляризации состоит в соответствии с принципом невязки (5.25) в решении уравнения

$$\varphi(\alpha) = \delta. \quad (5.26)$$

В достаточно общих условиях функция  $\varphi(\alpha)$  является неубывающей и уравнение (5.26) имеет решение.

Для приближенного решения уравнения (5.26) применяются различные вычислительные процедуры. Например, используется последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0, \quad (5.27)$$

и вычисления проводятся начиная с  $k = 0$  до некоторого  $k = K$ , при котором равенство (5.26) с приемлемой точностью выполняется. При таком определении параметра регуляризации требуется  $K + 1$  вычислений невязки (решений вариационных задач типа (5.4), (5.5) или уравнений Эйлера (5.13)).

Для приближенного решения уравнения (5.26) можно использовать и более быстрее сходящиеся итерационные методы. Установлено, что функция  $\psi(\beta) = \varphi(1/\beta)$  является убывающей и выпуклой функцией. Поэтому для решения уравнения

$$\psi(\beta) = \delta$$

можно использовать итерационный метод Ньютона, когда

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\psi(\beta_k) - \delta}{\psi'(\beta_k)}.$$

Этот метод будет сходиться при любом начальном приближении  $\beta_0 > 0$ . Для того чтобы не вычислять производную функции  $\psi(\beta)$ , можно использовать итерационный метод секущих, когда

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{\psi(\beta_k) - \psi(\beta_{k-1})} (\psi(\beta_k) - \delta).$$



Использование подобных итерационных процедур позволяет сократить общие вычислительные затраты на определение параметра регуляризации  $\alpha$ .

### 5.3.3. Другие способы выбора параметра регуляризации

В силу того что оценки погрешности задания входных данных (типа (5.2)) часто не известны, плохо контролируемы, использование хорошо апробированного и теоретически отработанного метода невязки затруднительно. Поэтому в вычислительной практике широкое распространение получили другие способы определения параметра регуляризации.

Выбор квазиоптимального значения параметра регуляризации напрямую не связан с уровнем погрешностей  $\delta$ . Выбирается значение  $\alpha > 0$ , которое минимизирует функцию

$$\chi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right\|. \quad (5.28)$$

Для нахождения квазиоптимального значения чаще всего используется последовательность (5.27). Минимизация (5.28) на таких значениях параметра регуляризации соответствует поиску минимума

$$\tilde{\chi}(\alpha_{k+1}) = \|u_{\alpha_{k+1}} - u_{\alpha_k}\|.$$

Тем самым необходимо проводить оценку лишь нормы разности приближенных решений на двух соседних итерациях.

Имеются и другие способы выбора параметра регуляризации. Отметим лишь тот общий момент, что выбор параметра регуляризации приводит к существенному увеличению вычислительной работы и носит в той или иной степени итерационный характер. При каждом значении итерационного параметра решается задача (5.4), (5.5) или эквивалентное ей уравнение (5.13). Понятное дело, что при промежуточных значениях параметра регуляризации нет большого смысла в очень точном решении таких задач. Поэтому можно комбинировать нахождение решения задачи (5.13) с выбором параметра регуляризации. Близкая идея фактически реализована в итерационных методах решения некорректных задач за счет объединения функций итерационного параметра и параметра регуляризации.

## 5.4. Итерационные методы решения некорректных задач

При решении некорректных задач с большим успехом применяются итерационные методы. В этом случае в качестве параметра регуляриза-

ции выступает число итераций. На примере решения задачи (5.1), (5.2) обсуждаются основные особенности применения итерационных методов.

### 5.4.1. Особенности применения итерационных методов

Отметим некоторые основные особенности применения итерационных методов для решения некорректных задач. Будем рассматривать модельную задачу (5.1), (5.2), в которой оператор  $A$  самосопряженный и положительный. Некорректность задачи связана с тем, что собственные значения оператора  $A$ , упорядоченные по убыванию ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq \dots > 0$ ), стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

Общий двухслойный итерационный метод для решения уравнения (5.3) с приближенно заданной правой частью записывается в виде

$$B \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + Au_k = f_\delta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.29)$$

Здесь  $B: H \rightarrow H$  и  $B^{-1}$  существует.

Если в исходной задаче (5.1), (5.2) оператор  $A$  не является самосопряженным и положительным, то проводится предварительная симметризация по Гауссу. Применение итерационного метода для симметризованной задачи соответствует использованию

$$B \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + A^* Au_k = A^* f_\delta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.30)$$

В зависимости от контекста итерационный метод (5.30) может интерпретироваться и как итерационный метод решения вариационной задачи минимизации функционала невязки

$$J_0(v) = \|Av - f_\delta\|^2.$$

Итерационный метод (5.29), его скорость сходимости характеризуется выбором оператора  $B$  и итерационных параметров  $\tau_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Краткое обсуждение этих вопросов применительно к решению сеточных задач, которые возникают при использовании разностных методов для эллиптических краевых задач, приведено в главе 3. Однако прямое использование ранее приведенных результатов о скорости сходимости итерационных методов мало что дает при рассмотрении итерационных методов для решения некорректной задачи (5.3).

Остановимся вначале на случае явных итерационных методов, когда оператор  $B = E$ , и постоянного итерационного параметра (метод простой итерации), т. е.

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + Au_k = f_\delta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.31)$$

Скорость сходимости итерационного метода (5.31) (см. теорему 3.3) определяется постоянными  $\gamma_1, \gamma_2$  в неравенстве

$$\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E. \quad (5.32)$$

При  $\gamma_1 > 0$  итерационный метод (5.31) сходится в  $H, H_A$  при всех

$$0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}, \quad (5.33)$$

а для числа итераций  $n$ , необходимых для достижения точности  $\varepsilon$ , справедлива оценка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0},$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

В случае задачи (5.3) при наших предположениях об операторе задачи  $A$  для постоянных в неравенстве (5.32) имеем  $\gamma_2 = \lambda_1$ , а  $\gamma_1 = 0$ , и тем самым  $\xi = 0$ . В силу этого, мы не можем конкретизировать скорость сходимости итерационного метода.

Вторая основная особенность применения итерационных методов для приближенного решения некорректных задач связана с критерием останова. При решении сеточных эллиптических уравнений итерации продолжают до тех пор, пока начальная невязка не упадет в  $\varepsilon^{-1}$  раз. Параметр  $\varepsilon$  задается из тех или иных соображений. При итерационном решении некорректной задачи (5.3) с учетом неточного задания правой части (оценка (5.2)) мы можем выбирать условие окончания итераций, согласуясь с этим уровнем погрешности, т. е. итерации продолжают до некоторого  $n(\delta)$ .

#### 5.4.2. Итерационное решение некорректной задачи

Сформулируем условия, при которых итерационный метод (5.31) дает приближенное решение задачи (5.1), (5.2).

**Теорема 5.4.** Пусть в итерационном методе (5.31)–(5.33) число итераций  $n(\delta) \rightarrow \infty$  и  $n(\delta)\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда  $\|u_{n(\delta)} - u\| \rightarrow 0$ , если  $\delta \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $z_n = u_n - u$  погрешность на  $n$ -ой итерации. Из (5.31) непосредственно получаем

$$u_n = (E - \tau A)^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (E - \tau A)^k \tau f_\delta, \quad (5.34)$$

где  $u_0$  — некоторое заданное начальное приближение.

Для точного решения можно воспользоваться аналогичным представлением

$$u = (E - \tau A)^n u + \sum_{k=0}^{n-1} (E - \tau A)^k \tau f.$$

Оно соответствует итерационному решению уравнения (5.1), когда начальное приближение совпадает с точным решением задачи.

С учетом (5.34) для погрешности получим выражение

$$z_n = z_n^{(1)} + z_n^{(2)}, \quad (5.35)$$

где

$$z_n^{(1)} = (E - \tau A)^n z_0, \quad z_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (E - \tau A)^k \tau (f_\delta - f),$$

причем  $z_0 = u_0 - u$  — начальная погрешность. Первое слагаемое  $z_n^{(1)}$  в (5.35) является стандартным для итерационных методов, слагаемое  $z_n^{(2)}$  в правой части (5.35) связано с учетом погрешности в задании правой части уравнения (5.1).

При сформулированных (см. (5.33)) ограничениях на итерационный параметр  $\tau$  имеем

$$\|E - \tau A\| < 1. \quad (5.36)$$

Для доказательства перейдем от неравенства (5.36) к эквивалентному неравенству

$$(E - \tau A^*)(E - \tau A) < E.$$

С учетом самосопряженности и положительности оператора  $A$  и оценки  $A \leq \gamma_2 E$  (см. (5.32)) получим

$$(E - \tau A^*)(E - \tau A) - E = \tau A^{1/2}(\tau A - 2E)A^{1/2} \leq \tau A^{1/2}(\tau \gamma_2 - 2)EA^{1/2} < 0$$

при выполнении (5.33).

Принимая во внимание (5.36) имеем

$$\|z_n^{(2)}\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|E - \tau A\|^k \tau \|f_\delta - f\| \leq n\tau \delta. \quad (5.37)$$

Более подробного обсуждения заслуживает оценка  $z_n^{(1)}$ .

Будем считать, что  $z_0 \in H$ . Это имеет, например, место при начальном приближении  $u_0 = 0$  при решении задачи (5.1), (5.2) в классе (5.7). Покажем, что  $s(n) = \|z_n^{(1)}\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Воспользуемся представлением

$$s^2(n) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \tau \lambda_i)^{2n} (z_0, w_i)^2.$$

Для любого малого  $\varepsilon > 0$  найдется достаточно большое  $N$  такое, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (z_0, w_i)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

С учетом  $|1 - \tau \lambda_i| < 1$  имеем

$$s^2(n) \leq \sum_{i=1}^N (1 - \tau \lambda_i)^{2n} (z_0, w_i)^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} (z_0, w_i)^2.$$

Для первого слагаемого при достаточно больших  $n$

$$\sum_{i=1}^N (1 - \tau \lambda_i)^{2n} (z_0, w_i)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подстановка (5.37) в (5.35) приводит нас к оценке

$$\|z_n\| \leq n\tau\delta + s(n), \quad (5.38)$$

где  $s(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из полученной оценки (5.38) непосредственно следует доказываемое утверждение. ■

В случае применения итерационного метода (5.31)–(5.33) в качестве параметра регуляризации выступает число итераций, которое согласуется с погрешностью в задании правой части. Первый член в правой части (5.38) растет с числом итераций, а второй — падает. Для минимизации погрешности необходимо выбирать число итераций не слишком большим и не слишком малым.

### 5.4.3. Оценки скорости сходимости

Как и при доказательстве теоремы 5.1 мы установили факт сходимости без конкретизации скорости сходимости. При сужении класса априорных ограничений на решение можно получить (см. теорему 5.2) явную зависимость погрешности приближенного решения от погрешности в задании правой части. Аналогичная ситуация наблюдается и при использовании итерационных методов решения некорректных задач. Сформулируем типичный результат в этом направлении.

Будем рассматривать итерационный метод (5.31), (5.32) при более жестких, чем (5.33), ограничениях на итерационный параметр

$$0 < \tau \leq \frac{1}{\gamma_2}. \quad (5.39)$$

**Теорема 5.5.** Пусть точное решение задачи (5.3) принадлежит классу

$$\|A^{-p}u\| \leq M, \quad 0 < p < \infty. \quad (5.40)$$

Тогда для погрешности итерационного метода (5.31), (5.32), (5.39), в котором  $u_0 = 0$ , справедлива оценка

$$\|z_n\| \leq n\tau\delta + M_1 n^{-p}, \quad M_1 = M_1(\tau, p, M). \quad (5.41)$$

*Доказательство.* Достаточно в условиях (5.40) конкретизировать зависимость  $s(n)$  в оценке (5.38) от числа итераций.

При  $u_0 = 0$  имеем  $z_0 = u$  и с учетом ранее введенных обозначений получим

$$z_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^p (1 - \tau\lambda_i)^n \frac{(u, w_i)}{\lambda_i^p} w_i.$$

Принимая во внимание (5.40), получим

$$s(n) \leq \max_{\lambda_i} \lambda_i^p |1 - \tau\lambda_i|^n \cdot \|A^{-p}u\|. \quad (5.42)$$

При ограничениях на итерационный параметр (5.39)  $0 < \tau\lambda_i \leq 1$  и поэтому

$$\max_{\lambda_i} \lambda_i^p |1 - \tau\lambda_i|^n \leq \frac{1}{\tau^p} \max_{0 < \eta < 1} \chi(\eta), \quad \chi(\eta) = \eta^p (1 - \eta)^n.$$

Максимум функции  $\chi(\eta)$  достигается в точке

$$\eta = \eta^* = \frac{p}{p+n},$$

причем

$$\chi(\eta^*) = \left(\frac{p}{n}\right)^p \left(1 - \frac{p}{p+n}\right)^{p+n} < \frac{p^p}{n^p} \exp\{-p\}.$$

Подстановка в (5.42) приводит к оценке (5.41), в которой постоянная

$$M_1 = \frac{p^p}{\tau^p} \exp\{-p\} M$$

зависит от  $p$ ,  $\tau$  и  $M$ , но не зависит от числа итераций  $n$ . ■

Минимизацией правой части оценки (5.41) формулируется критерий для окончания итераций

$$n_{\text{опт}} = \left(\frac{pM_1}{\tau}\right)^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)}, \quad (5.43)$$

т. е.  $n(\delta) = O(\delta^{-1/(p+1)})$ . В этом случае для погрешности приближенного решения получим оценку

$$\|z_{n_{\text{опт}}}\| \leq M_2 \delta^{p/(p+1)} \quad (5.44)$$

с постоянной

$$M_2 = \tau \left( \frac{pM_1}{\tau} \right)^{1/(p+1)} + M_1 \left( \frac{pM_1}{\tau} \right)^{-p/(p+1)}.$$

Оценка (5.44) демонстрирует прямую зависимость скорости сходимости приближенного решения к точному от погрешности в задании правой части  $\delta$  и гладкости точного решения (параметр  $p$ ).

#### 5.4.4. Обобщения

Выше мы отметили возможность оптимального выбора числа итераций в случае известного класса априорных ограничений на точное решение задачи (постоянная  $M$  в (5.40)). При практическом использовании итерационных методов решения некорректных задач класс априорных ограничений часто не удается явно сформулировать. Поэтому вместо (5.43) число итераций выбирается по невязке, т. е. итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\|Au_{n(\delta)} - f_\delta\| \leq \delta. \quad (5.45)$$

При обсуждении итерационных методов решения сеточных эллиптических уравнений выделены итерационные методы вариационного типа. Они характеризуются использованием явных расчетных формул для итерационных параметров. Например, итерационный метод скорейшего спуска характеризуется использованием итерационного метода

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + Au_k = f_\delta, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.46)$$

в котором

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, \quad r_k = Au_k - f_\delta. \quad (5.47)$$

В этой связи необходимо отметить также метод сопряженных градиентов. Он относится к классу трехслойных итерационных методов, когда при решении задачи (5.3)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \alpha_{k+1}(E - \tau_{k+1}A)u_k + (1 - \alpha_{k+1})u_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f_\delta, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, \\ u_1 &= (E - \tau_1A)u_0 + \tau_1f_\delta. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Для итерационных параметров  $\alpha_{k+1}$  и  $\tau_{k+1}$  используются расчетные формулы

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \alpha_{k+1} &= \left( 1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha_1 = 1. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Мы не будем останавливаться на рассмотрении регуляризирующих свойств таких итерационных методов, отсылая заинтересованного читателя к специальной литературе. Отметим только, что для вариационных итерационных методов (5.46), (5.47) и (5.48), (5.49) для решения некорректной задачи (5.1), (5.2) получены аналогичные результаты, что и для метода простой итерации (5.31).

Отдельного обсуждения заслуживает проблема использования невязных итерационных методов при решении некорректных задач: итерационных методов типа (5.29), (5.30), в которых  $B \neq E$ . В общем контексте есть проблема выбора оператора  $B$  при решении некорректных задач.

При решении сеточных задач для корректных задач математической физики выбор оператора  $B$  подчинен исключительно ускорению скорости сходимости итерационного метода. При решении некорректных задач итерационный процесс обрывается до достижения невязки, величина которой определяется погрешностью входных данных. Для нас важно не только с какой скоростью сходится итерационный процесс на этом участке убывания, но и в каком классе гладкости этот итерационный процесс сходится, в какой норме необходимый уровень невязки достигается. Наиболее важная особенность приближенного решения некорректных задач итерационными методами состоит в том, что выделение приближенного решения из необходимого класса гладкости может достигаться именно выбором оператора  $B$ .

## 5.5. Программная реализация и примеры расчетов

В качестве типовой некорректной задачи обычно выступает интегральное уравнение первого рода. Мы не отступаем от традиций и рассматриваем вопросы численного решения интегрального уравнения, которое используется при продолжении аномальных гравитационных полей, заданных на земной поверхности, в сторону возмущающих масс. Программная реализация базируется на применении итерационных методов при решении задачи со случайными погрешностями во входных данных.

### 5.5.1. Задача продолжения потенциала

В грави- и магниторазведке, а также в электроразведке постоянным током важнейшей является задача продолжения потенциальных полей с поверхности Земли вглубь. На основе решения такой задачи идентифицируются в той или иной степени положения аномалий гравитационного



и электромагнитных полей. Мы ограничимся здесь формулировкой двумерной задачи продолжения гравитационных полей.

Обозначим через  $U$  гравитационный потенциал аномалии, расположенной в толще Земли. Пусть  $x$  — горизонтальная координата, ось  $z$  направим вертикально вверх, причем на земной поверхности  $z = 0$ . Рассматривается задача определения гравитационного потенциала при  $z < 0$  вплоть до аномалий, глубина залеганий которых есть  $H$ .

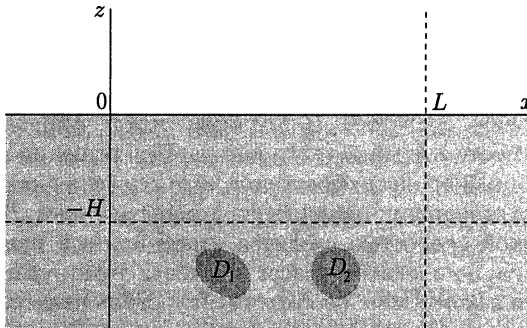


Рис. 5.1. К задаче продолжения

Мы рассматриваем задачу продолжения гравитационного потенциала от возмущающих масс ( $D_1, D_2$  на рис. 5.1). Этот потенциал  $U(x, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа в зоне вне аномалий, так что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad z > -H. \quad (5.50)$$

На земной поверхности по данным натуральных измерений (наблюдается вертикальная первая производная потенциала) ставятся условия

$$\frac{\partial U}{\partial z}(x, 0) = \varphi(x). \quad (5.51)$$

Еще одно краевое условие имеет вид

$$U(x, \infty) = 0. \quad (5.52)$$

На функцию  $\varphi(x)$  накладываются естественные ограничения на поведение при  $|x| \rightarrow \infty$ , обеспечивающие ограниченность решения.

Задача (5.50)–(5.52), рассматриваемая при  $z > 0$ , есть обычная краевая задача. Ставится проблема продолжения решения этой корректной задачи в прилегающую область, в которой  $-H < z < 0$ .

Задача продолжения (5.50)–(5.52) при  $z < 0$  не совсем удобна для исследования из-за граничного условия (5.52). Ее можно переформулировать как задачу продолжения для  $u = \partial U / \partial z$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad z > -H, \quad (5.53)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.54)$$

$$u(x, \infty) = 0. \quad (5.55)$$

В случае (5.53)–(5.55) мы имеем задачу продолжения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Приведем некоторые простейшие соображения относительно необходимости решения задач продолжения гравитационных полей в сторону аномалий. В проведенных расчетах рассматривалась модельная задача с двумя аномалиями кругового сечения с центрами  $(x^1, z^1) = (0,8, -0,3)$ ,

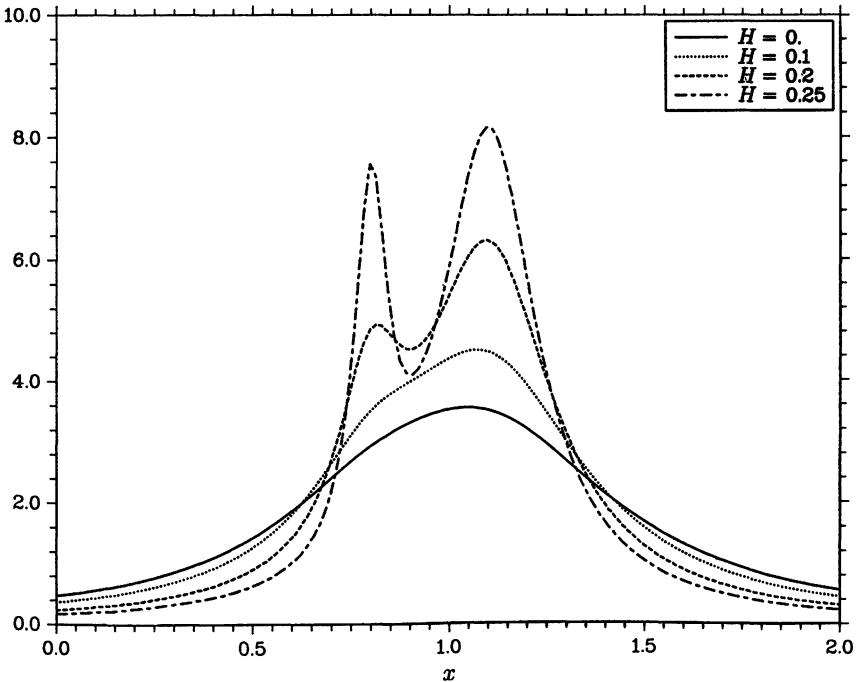


Рис. 5.2. Решение прямой задачи на различных глубинах

$(x^2, z^2) = (1, 1, -0, 4)$ . Точное решение задачи (5.53)–(5.55) имеет вид

$$u(x, z) = c_1 \frac{z - z_1}{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2} + c_2 \frac{z - z_2}{(x - x_2)^2 + (z - z_2)^2}.$$

Пусть  $c_1 = 0,3$ ,  $c_2 = 1,2$ , т. е. более глубокая аномалия имеет в четыре раза большую мощность.

Точное решение задачи на различных глубинах  $H$  показано на рис. 5.2. При  $H = 0$  и  $H = 0,1$  по данным измерений плохо идентифицируются два источника возмущений гравитационного потенциала. При больших глубинах (при приближении к источникам) происходит разделение аномалий (при  $H = 0,2$  и особенно при  $H = 0,25$ ). Именно с этим обстоятельством связывается необходимость продолжения потенциальных полей в сторону аномалий.

### 5.5.2. Интегральное уравнение

Для приближенного решения задачи продолжения (5.53)–(5.55) можно использовать различные вычислительные алгоритмы. Мы остановимся на применении метода интегральных уравнений. Гравитационный потенциал от аномалий будем приближать потенциалом простого слоя с носителем, расположенным на отрезке  $0 \leq x \leq L$  и глубине  $z = -H$ . С точностью до множителя

$$U(x, z) = \int_0^L \ln r \mu(s) ds, \quad r = \sqrt{(x - s)^2 + (z + H)^2}, \quad z > -H.$$

Для производной по вертикальной переменной получим

$$u(x, z) = \int_0^L \frac{z + H}{(x - s)^2 + (z + H)^2} \mu(s) ds, \quad z > -H. \quad (5.56)$$

Для определения неизвестной плотности из (5.54) и (5.56) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^L K(x, s) \mu(s) ds = \varphi(x) \quad (5.57)$$

с симметричным ядром

$$K(x, s) = \frac{H}{(x - s)^2 + H^2}.$$

Уравнение (5.57) запишем в виде уравнения первого рода

$$A\mu = \varphi, \quad (5.58)$$

в котором

$$A\mu = \int_0^L K(x, s)\mu(s) ds.$$

Интегральный оператор  $A: H \rightarrow H$ , где  $H = L_2(0, L)$  является самосопряженным  $(A\mu, \nu) = (\mu, A\nu)$ . Кроме того, он является ограниченным, так как

$$\begin{aligned} (A\mu, \mu) &= \int_0^L \int_0^L K(x, s)\mu(s)\mu(x) ds dx \leq \\ &\leq \left( \int_0^L \int_0^L K^2(x, s) ds dx \right)^{1/2} \left( \int_0^L \int_0^L \mu^2(s)\mu^2(x) ds dx \right)^{1/2} \leq \gamma_2 \|\mu\|^2, \end{aligned}$$

где  $\gamma_2 < L/H$ .

Рассматриваемый интегральный оператор самосопряжен и ограничен. Однако применение итерационного метода непосредственно для уравнения (5.58) неправомерно в силу того, что оператор  $A$ , вообще говоря, не является положительным (неотрицательным). Поэтому необходимо использовать симметризацию уравнения (5.58):

$$A^* A \mu = A^* \varphi, \quad (5.59)$$

после которой уже используется итерационный метод.

### 5.5.3. Вычислительная реализация

При численном решении интегрального уравнения (5.59) используется равномерная сетка

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = (i - 0,5)h, i = 1, 2, \dots, N, Nh = L\}.$$

Приближенное решение обозначим  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Интегральному оператору  $A$  поставим в соответствие сеточный оператор

$$(A_h y)(x_i) = \sum_{j=1}^N K(x_i, s_j) y_j h. \quad (5.60)$$

Такая аппроксимация соответствует применению квадратурной формулы прямоугольников. Сеточным аналогом уравнения (5.59) является

$$Ry = f, \quad R = A_h^* A_h, \quad f = A_h^* \varphi. \quad (5.61)$$

Для приближенного решения (5.61) применяется итерационный метод

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ry_k = f, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.62)$$

Рассматривались два способа выбора итерационных параметров:

1. Метод простой итерации —  $\tau_k = \tau = \text{const}$ .
2. Метод скорейшего спуска, когда

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Rr_k, r_k)}, \quad r_k = Ry_k - f.$$

Погрешности в задании входных данных моделировались тем, что точное решение в узлах сетки возмущалось по закону:

$$\varphi_\delta(x) = \varphi(x) + 2\zeta \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \right), \quad x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\sigma(x)$  — нормально распределенная от 0 до 1 случайная величина. Параметр  $\zeta$  определяет уровень погрешности в задании правой части уравнения (5.58), причем

$$\|\varphi_\delta(x) - \varphi(x)\| \leq \delta = \zeta\sqrt{L}.$$

Выход из итерационного процесса проводится по невязке. Некоторые другие особенности вычислительного алгоритма отмечаются ниже.

#### 5.5.4. Программа

Для приближенного решения модельной двумерной задачи продолжения гравитационных полей используется следующая программа.

##### Программа PROBLEM4

```

C
C   PROBLEM4 - ПРОДОЛЖЕНИЕ АНОМАЛЬНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ
C
C   PARAMETER ( NH = 0.225, DELTA = 0.1, IScheme = 1, N = 100 )
C   DIMENSION Y(N), X(N), PHI(N), PHID(N), F(N), A(N,N),
C   +          V(N), R(N), AR(N), U(N), UY(N), UY1(N)
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR   - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   NH       - ГЛУБИНА РАСПОЛОЖЕНИЯ НОСИТЕЛЯ;
C   NO       - ГЛУБИНА ПРОДОЛЖЕНИЯ;
C   IScheme  - МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ (IScheme = 0),
C             МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА (IScheme = 1);
C   N        - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ;

```

```

C      Y(N)      - РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ;
C      U(N)      - ТОЧНОЕ АНОМАЛЬНОЕ ПОЛЕ НА ГЛУБИНЕ Z = H0;
C      UY(N)     - РАССЧИТАННОЕ ПОЛЕ НА ГЛУБИНЕ Z = H0;
C      UY1(N)    - РАССЧИТАННОЕ ПОЛЕ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ;
C      PHI(N)    - ТОЧНОЕ АНОМАЛЬНОЕ ПОЛЕ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ;
C      PHID(N)   - ВОЗМУЩЕННОЕ ПОЛЕ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ;
C      DELTA     - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C      A(N,N)    - МАТРИЦА ЗАДАЧИ;
C
C      XL = 0.
C      XR = 2.
C
C      OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C      СЕТКА
C
C      H = (XR - XL)/N
C      DO I = 1, N
C          X(I) = XL + (I-0.5)*H
C      END DO
C
C      ДАННЫЕ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
C
C      C1 = 0.3
C      X1 = 0.8
C      Z1 = - 0.3
C      C2 = 1.2
C      X2 = 1.1
C      Z2 = - 0.4
C      DO I = 1,N
C          PHI(I) = - C1/((X(I)-X1)**2 + Z1**2) * Z1
C          *      - C2/((X(I)-X2)**2 + Z2**2) * Z2
C          PHID(I) = PHI(I) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)/SQRT(XR-XL)
C      END DO
C
C      ТОЧНЫЕ ДАННЫЕ НА ГЛУБИНЕ
C
C      H0 = 0.2
C      DO I = 1,N
C          U(I) = - C1/((X(I)-X1)**2 + (H0+Z1)**2) * (H0+Z1)
C          *      - C2/((X(I)-X2)**2 + (H0+Z2)**2) * (H0+Z2)
C      END DO
C
C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
C      DO I = 1,N
C          SUM = 0.
C          DO J = 1,N
C              SUM = SUM + AK(X(I),X(J),H0) * PHID(J)
C          END DO
C          F(I) = SUM * H
C      END DO
C

```

```

C      ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЦЫ
C
      DO I = 1,N
        DO J = 1,N
          SUM = 0.
          DO K = 1,N
            SUM = SUM + AK(X(I),X(K),HH) * AK(X(K),X(J),HH)
          END DO
          A(I,J) = SUM * H**2
        END DO
      END DO

C
C      ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС
C
      IT = 0
      ITMAX = 100
      DO I = 1,N
        Y(I) = 0.
      END DO
100 IT = IT+1

C
C      ВЫЧИСЛЕНИЕ V = R Y
C
      DO I = 1,N
        SUM = 0.
        DO J = 1,N
          SUM = SUM + A(I,J) * Y(J)
        END DO
        V(I) = SUM
      END DO

C
C      ИТЕРАЦИОННЫЙ ПАРАМЕТР
C
      DO I = 1,N
        R(I) = V(I) - F(I)
      END DO
      IF (ISCHEME.EQ.0) THEN

C
C      МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ
C
      TAU = 0.1
      END IF
      IF (ISCHEME.EQ.1) THEN

C
C      МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА
C
      DO I = 1,N
        R(I) = V(I) - F(I)
      END DO
      DO I = 1,N
        SUM = 0.
        DO J = 1,N
          SUM = SUM + A(I,J) * R(J)
        END DO
      END DO
    END IF
  END DO

```

```

        END DO
        AR(I) = SUM
    END DO
    SUM1 = 0.
    SUM2 = 0.
    DO I = 2,N-1
        SUM1 = SUM1 + R(I)*R(I)
        SUM2 = SUM2 + AR(I)*R(I)
    END DO
    TAU = SUM1/SUM2
    END IF

C
C
C    НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
    DO I = 1,N
        Y(I) = Y(I) - TAU*R(I)
    END DO

C
C
C    ВЫХОД ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ЦИКЛА
    SUM0 = 0.
    DO I = 1,N
        SUM = 0.
        DO J = 1,N
            SUM = SUM + AK(X(I),X(J),HH) * Y(J)
        END DO
        SUM0 = SUM0 + (SUM * H - PHID(I))*2 * H
    END DO
    SL2 = SQRT(SUM0)
    WRITE ( 01,* ) IT, TAU, SL2
    IF (SL2.GT.DELTA .AND. IT.LT.ITMAX) GO TO 100
    CLOSE ( 01 )

C
C
C    ВЫЧИСЛЕНИЕ НАЙДЕННОГО ПОЛЯ НА ГЛУБИНЕ Z = H0
    DO I = 1,N
        SUM = 0.
        DO J = 1,N
            SUM = SUM + AK(X(I),X(J),HH-H0) * Y(J)
        END DO
        UY(I) = SUM * H
    END DO

C
C
C    ВЫЧИСЛЕНИЕ НАЙДЕННОГО ПОЛЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
    DO I = 1,N
        SUM = 0.
        DO J = 1,N
            SUM = SUM + AK(X(I),X(J),HH) * Y(J)
        END DO
        UY1(I) = SUM * H
    END DO
    STOP

```



```

END
C
C
FUNCTION AK(X,S,HH)
C
C   ЯДРО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
C
  AK = HH/((X-S)**2 + HH**2)
  RETURN
END

```

### 5.5.5. Результаты расчетов

Приведем некоторые примеры решения задачи продолжения в случае, когда  $H = 0,225$ . Используется расчетная сетка с  $N = 100$  узлами. Наиболее интересной представляется зависимость точности восстановления гравитационного аномального поля в зависимости от погрешности во входных данных  $\delta$ .

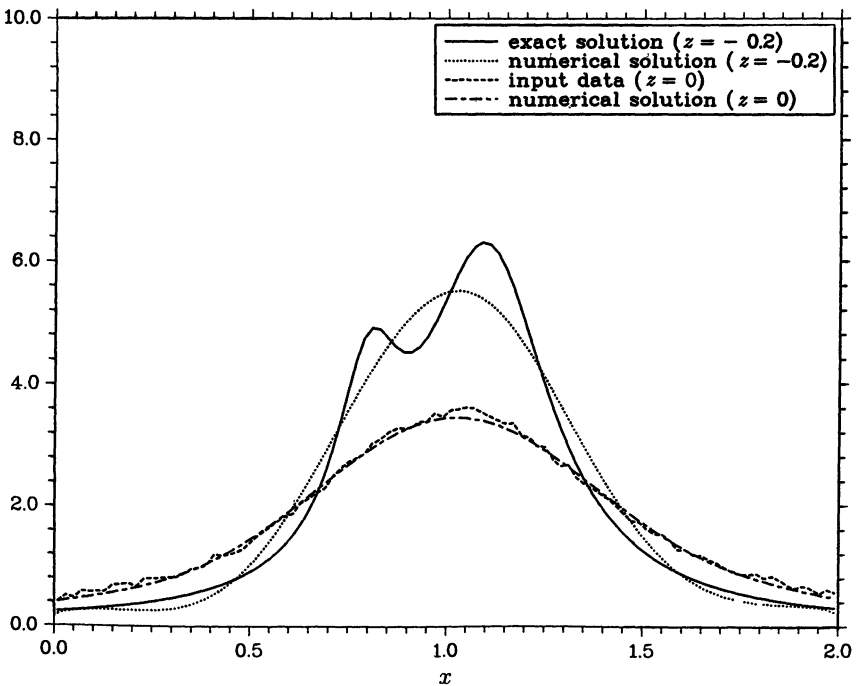


Рис. 5.3. Решение задачи продолжения при  $\delta = 0,1$

На рис. 5.3 представлены данные, полученные при решении задачи с погрешностью  $\delta = 0,1$  во входных данных (поля на земной поверхности  $z = 0$ ). Приведены точное и найденное поля на глубине  $z = -2$ . Аналогичные данные при большем уровне погрешностей ( $\delta = 0,2$ ) приведены на рис. 5.4. При таком уровне погрешностей сложно идентифицировать наличие двух аномалий (не наблюдается двухгорбовая конфигурация). И даже уменьшение  $\delta$  до  $\delta = 0,01$  не намного спасает ситуацию (см. рис. 5.5).

Несколько слов об использовании тех или иных итерационных методов. В программе PROBLEM4 предусматривается возможность использования метода простой итерации (постоянный итерационный параметр) и метода скорейшего спуска. Небольшой модификацией можно реализовать вариант итерационного метода сопряженных градиентов, который необходимо использовать в задачах с очень малыми погрешностями в правых частях, когда скорости сходимости метода скорейшего спуска не хватает.

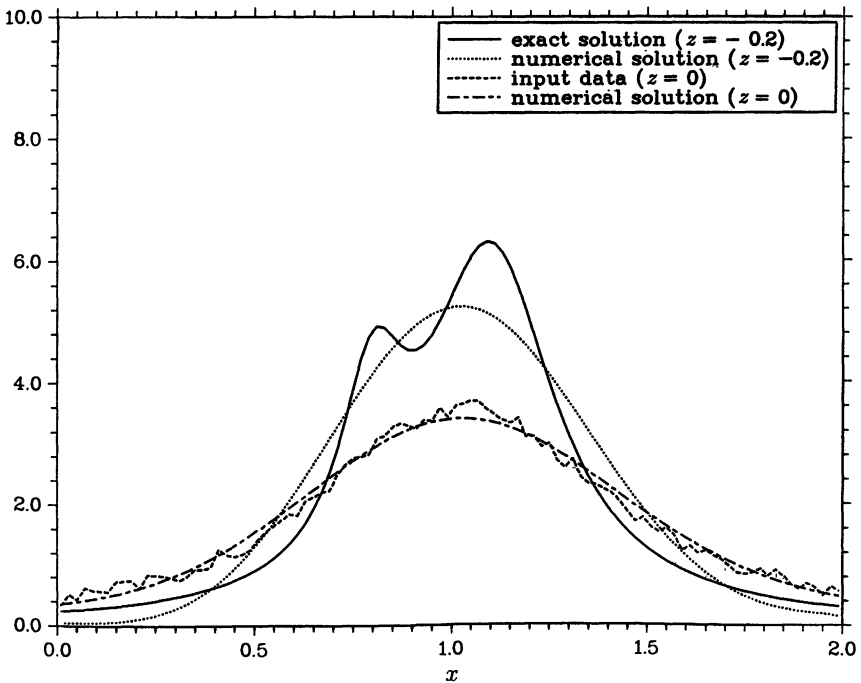


Рис. 5.4. Решение задачи продолжения при  $\delta = 0,2$

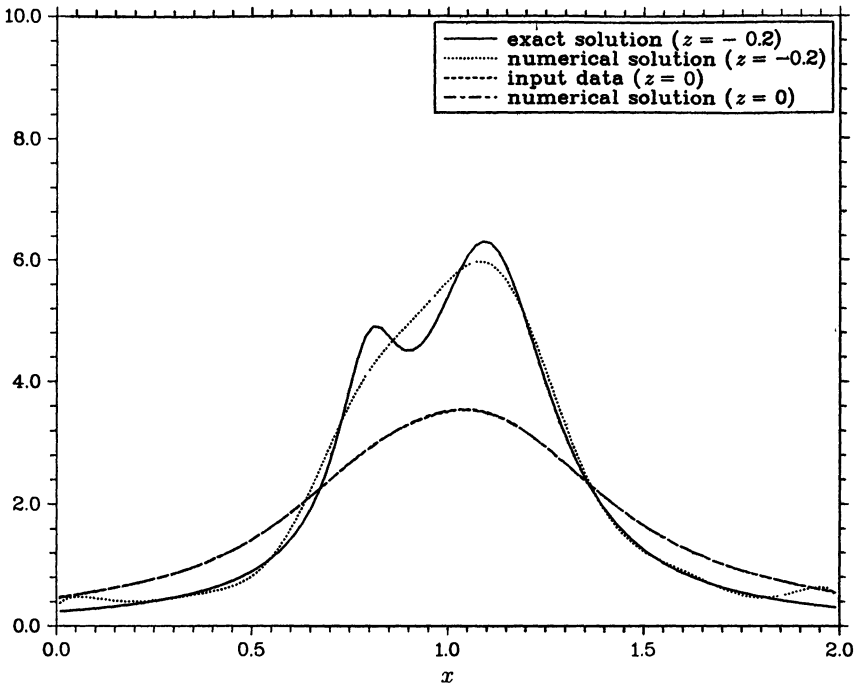


Рис. 5.5. Решение задачи продолжения при  $\delta = 0,01$

Для решения задачи с  $\delta = 0,1$  методом скорейшего спуска требуется  $n = 6$  итераций. Зависимость числа итераций в методе простой итерации от итерационного параметра иллюстрируется данными табл. 5.1.

Таблица 5.1

Число итераций в методе простой итерации

$\tau$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$n$	43	21	14	11	9	32

Для оценки оптимального итерационного параметра  $\tau = \tau_0 = 2/\bar{\gamma}_2$ , где

$$A^* A \leq \bar{\gamma}_2 E,$$

при итерационном решении интегрального уравнения (5.59) можем привлечь оценку  $\bar{\gamma}_2 < L^2/H^2$ .

## 5.6. Задачи и упражнения

**5.1.** Покажите, что в методе регуляризации А. Н. Тихонова для решения верна априорная оценка

$$\|u_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \|f_\delta\|,$$

которая выражает устойчивость по правой части.

**5.2.** Сформулируйте условия (аналог теорем 5.1, 5.2) сходимости приближенного решения в  $H_D$ ,  $D = D^* > 0$ , которое определяется из минимума функционала

$$J_\alpha(v) = \|Av - f_\delta\|^2 + \alpha\|v\|_D^2.$$

**5.3.** Постройте пример, показывающий необходимость условия

$$\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$$

при  $\delta \rightarrow 0$  (теорема 5.1) для сходимости приближенного решения к точному в методе А. Н. Тихонова.

**5.4.** Пусть точное решение задачи (5.1) ищется в классе

$$\|A^{-2}u\| \leq M,$$

где  $M = \text{const} > 0$ , и для погрешности правой части выполнена оценка (5.2). Тогда для приближенного решения  $u_\alpha$ , определяемого как решение задачи (5.4), (5.5), справедлива априорная оценка

$$\|z\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \alpha M.$$

**5.5.** Получите оценку скорости сходимости метода А. Н. Тихонова при априорных ограничениях

$$\|A^{-p}u\| \leq M, \quad 0 < p < 2,$$

на точное решение задачи (5.1), (5.2).

**5.6.** Пусть  $u_\alpha$  — решение задачи (5.4), (5.5) и

$$m(\alpha) = \|Au_\alpha - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_\alpha\|^2, \quad \varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - f_\delta\|^2, \quad \psi(\alpha) = \|u_\alpha\|^2.$$

Покажите, что при  $f_\delta \neq 0$  и  $0 < \alpha_1 < \alpha_2$  имеют место неравенства

$$m(\alpha_1) < m(\alpha_2), \quad \varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2), \quad \psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2).$$

**5.7.** Покажите, что для любого  $\delta \in (0, \|f_\delta\|)$  существует единственное решение  $\alpha = \alpha(\delta)$  уравнения

$$\varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - f_\delta\|^2 = \delta^2,$$

причем  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  и  $\|u_{\alpha(\delta)} - u\| \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  (обоснование выбора параметра регуляризации по невязке).

**5.8.** Алгоритм упрощенной регуляризации при решении задачи (5.1), (5.2) с  $A = A^* > 0$  связан с использованием уравнения

$$Au_\alpha + \alpha u_\alpha = f_\delta \quad (5.63)$$

для нахождения приближенного решения. Сформулируйте соответствующую вариационную задачу.

**5.9.** Докажите, что при

$$\|u\|_{A^{-1}} \leq M$$

для погрешности приближенного решения задачи (5.1), (5.2), определяемого из (5.63), справедлива априорная оценка

$$\|z\|^2 \leq \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2} M^2.$$

**5.10.** Для приближенного решения задачи (5.1), (5.2) используется итерационный метод

$$B \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + Au_k = f_\delta, \quad k = 0, 1, \dots$$

с  $B = B^* > 0$  и

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \quad 0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}.$$

Покажите, что в этом итерационном методе  $\|u_{n(\delta)} - u\|_B \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , если  $n(\delta) \rightarrow \infty$  и  $n(\delta)\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**5.11.** Пусть число итераций в методе (5.31)–(5.33) при решении задачи (5.1), (5.2) выбирается из условия

$$\|Au_{n(\delta)} - f_\delta\| \leq \delta < \|Au_{n(\delta)-1} - f_\delta\|,$$

причем  $\|Au_0 - f_\delta\| > \delta$ . Покажите, что в этом случае  $\|u_{n(\delta)} - u\| \rightarrow 0$ , если  $\delta \rightarrow 0$ .

**5.12.** Покажите некорректность решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x, s)\mu(s) ds = \varphi(x), \quad c \leq x \leq d$$

с непрерывно дифференцируемым по обоим переменным ядром  $K(x, s)$  при  $\mu(x) \in C[a, b]$ ,  $\varphi(x) \in C[c, d]$ .

**5.13.** Рассмотрим задачу продолжения гравитационного поля, обусловленного локальными аномалиями с неотрицательной аномальной (избыточной по отношению в окружающей породе) плотностью. Будем искать решение задачи продолжения (5.53)–(5.55) в виде (см. (5.57))

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, s)\mu(s) ds = \varphi(x),$$

причем аномалии локализованы на глубинах больших, чем  $H$ . Покажите, что  $\mu(x) \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ .

**5.14.** Реализуйте в программе PROMLEM4 метод сопряженных градиентов. Исследуйте его эффективность при решении задач с небольшими погрешностями в задании аномального гравитационного поля на земной поверхности,  $\delta \leq 0,01$ .

**5.15.** Модифицируйте программу PROMLEM4 для случая, когда приближенное решение задачи продолжения ищется в виде потенциала двойного слоя. На основе решения модельной задачи проведите анализ возможностей такого подхода.

## Глава 6

---

### Идентификация правой части

Важный класс обратных задач математической физики связан с определением неизвестной правой части уравнения. Дополнительная информация о решении задается во всей расчетной области или же в ее некоторой части, в частности, на границе. Если решение известно во всей области с некоторой погрешностью, то задача восстановления правой части фактически состоит в вычислении дифференциального оператора для функции, заданной приближенно. Необходимо также отметить особенности определения правой части для нестационарных задач, которые связаны с возможностью последовательного нахождения правой части на заданные моменты времени. Задача восстановления правой части часто решается в приближении, что неизвестна зависимость только от части переменных. В нестационарных задачах может определяться зависимость только от времени или только от пространственных переменных. В этом случае можно ограничиться дополнительной информацией о решении только в части расчетной области. Рассмотрены вычислительные алгоритмы решения подобных обратных краевых задач для стационарных и нестационарных уравнений математической физики. Приведены результаты вычислительных экспериментов по приближенному решению рассматриваемых обратных задач.

#### 6.1. Восстановление правой части стационарных задач по известному решению

Рассматривается задача восстановления правой части обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в условиях, когда с заданной точностью известно решение во всей расчетной области. Простейший вычислительный алгоритм базируется на использовании стандартных разностных аппроксимаций, при этом в качестве параметра

регуляризации выступает шаг сетки. Отмечаются возможности использования других подходов.

### 6.1.1. Постановка задачи

В качестве простейшей математической модели будем использовать обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (6.1)$$

при обычных ограничениях на его коэффициенты:

$$k(x) \geq \kappa > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Прямая задача состоит в определении функции  $u(x)$  из уравнения (6.1) с заданными коэффициентами  $k(x)$ ,  $q(x)$ , правой частью  $f(x)$  и дополнительных условий на границе. В простейшем случае заданы однородные граничные условия первого рода:

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \quad (6.2)$$

Сформулируем теперь обратную задачу. Будем считать, что правая часть  $f(x)$  неизвестна. Для ее определения требуется задать некоторую дополнительную информацию о самом решении. Нам необходимо найти функцию от  $x$ , поэтому дополнительную информацию желательно задать также в виде функции от  $x$ . Тем самым будем считать, что известно решение  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ .

При известном точном  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , правая часть определяется однозначно, из уравнения (6.1) следует, что

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u, \quad 0 < x < l. \quad (6.3)$$

Использование формулы (6.3) предполагает, например, что  $f(x) \in C(0, l)$ , если решение  $u(x) \in C^2[0, l]$  при  $k(x) \in C^1[0, l]$ ,  $q(x) \in C[0, l]$ .

Проблема состоит в том, что входные данные (в нашем случае решение  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ ) заданы приближенно и не принадлежат отмеченному классу гладкости. Типичная ситуация состоит в том, что вместо точного решения  $u(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , известна функция  $u_\delta(x)$ ,  $x \in [0, l]$ , причем  $u_\delta(x) \in C[0, l]$  и

$$\|u_\delta(x) - u(x)\|_{C[0, l]} \leq \delta, \quad (6.4)$$

где

$$\|v(x)\|_{C[0, l]} = \max_{x \in [0, l]} |v(x)|.$$

Задача (6.3), (6.4) есть задача вычисления значений дифференциального оператора. Она относится к классу некорректных в классическом



смысле, и для ее решения необходимо использовать регуляризирующие алгоритмы. Отметим некоторые основные возможности в этом направлении.

### 6.1.2. Разностные алгоритмы

Наиболее естественно использовать разностные методы для вычисления правой части  $f(x)$ ,  $0 < x < l$ . На интервале  $\Omega = [0, l]$  введем равномерную сетку с шагом  $h$ :

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

где  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Приближенное решение задачи (6.3), (6.4) во внутренних узлах обозначим  $f_h(x)$ . С использованием стандартных обозначений теории разностных схем положим

$$f_h(x) = -(ay_{\bar{x}})_x + cy, \quad x \in \omega, \quad (6.5)$$

где сеточная функция  $y$  определяется по

$$y(x) = u_\delta(x), \quad x \in \bar{\omega}.$$

Для  $U_\delta$  соотношением коэффициентов положим

$$a(x) = k(x - 0,5h), \quad x, x + h \in \omega, \quad c(x) = q(x), \quad x \in \omega.$$

Разностный алгоритм (6.5) будет регуляризирующим, если мы укажем правило выбора шага дискретизации  $h = h(\delta)$  в зависимости от погрешности  $\delta$  такое, что норма погрешности  $z = f_h - f$  стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Нас интересует также вопрос о скорости сходимости приближенного решения к точному.

С целью оптимизации выбора шага дискретизации и минимизации погрешности выделим два класса точных решений. Будем считать, что

$$\|u(x)\|_{C^4[0, l]} \leq M, \quad (6.6)$$

или же

$$\|u(x)\|_{C^3[0, l]} \leq M, \quad (6.7)$$

где

$$\|v(x)\|_{C^n[0, l]} = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{x \in [0, l]} \left| \frac{d^k v}{dx^k}(x) \right|.$$

В случаях (6.6), (6.7) на коэффициенты накладываются ограничения

$$k(x) \in C^3[0, l], \quad q(x) \in C^2[0, l]$$

или

$$k(x) \in C^2[0, l], \quad q(x) \in C^1[0, l]$$

соответственно.

Рассмотрим задачу для погрешности  $z(x) = f_h(x) - f(x)$ ,  $x \in \omega$ . Из (6.3), (6.5) непосредственно получим

$$z(x) = z^{(1)}(x) + z^{(2)}(x), \quad x \in \omega, \quad (6.8)$$

где

$$z^{(1)}(x) = -(au_{\bar{x}})_x + cu - f(x), \quad x \in \omega, \quad (6.9)$$

$$z^{(2)}(x) = f_h(x) + (au_{\bar{x}})_x - cu, \quad x \in \omega. \quad (6.10)$$

Оценим слагаемые в представлении погрешности (6.8) отдельно в зависимости от априорных предположений о точном решении задачи (6.3). Первое слагаемое ( $z^{(1)}(x)$ ) представляет собой погрешность аппроксимации дифференциального оператора разностным, второе слагаемое ( $z^{(2)}(x)$ ) отражает влияние неточного задания входных данных.

Для погрешности аппроксимации непосредственные выкладки дают

$$\begin{aligned} z^{(1)}(x) &= -(au_{\bar{x}})_x + cu + \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = \\ &= -\frac{a_{i+1} - a_i}{h} \frac{du}{dx}(x_i) - \frac{a_{i+1} + a_i}{2} \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) - \\ &\quad - \frac{a_{i+1} - a_i}{6} h \frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + cu + O(h^\beta) + \frac{dk}{dx} \frac{du}{dx} + k(x) \frac{d^2u}{dx^2} - q(x)u. \end{aligned}$$

Здесь  $\beta = 1$  в предположении (6.7) и  $\beta = 2$ , если выполнено (6.6).

Для погрешности из подобных представлений получим оценку

$$\|z^{(1)}(x)\| \leq M_1 h^\beta, \quad (6.11)$$

где использованы обозначения

$$\|z(x)\| = \|z(x)\|_{C(\omega)} = \max_{x \in \omega} |z(x)|.$$

Постоянная  $M_1$  в (6.11) зависит не только от решения, но и от коэффициента  $k(x)$ , его производных, т. е.  $M_1 = M_1(u, k)$ .

Для второй составляющей погрешности из (6.5), (6.10) имеем

$$\begin{aligned} \|z^{(2)}(x)\| &= \left\| -(a(y-u)_{\bar{x}})_x + c(y-u) \right\| \leq \\ &\leq \left( \max \{ \|a(x)\|, \|a(x+h)\| \} \frac{4}{h^2} + \|c(x)\| \right) \max_{x \in \bar{\omega}} \|y(x) - u(x)\|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (6.4), получим

$$\|z^{(2)}(x)\| \leq M_2 \delta. \quad (6.12)$$

Постоянная

$$M_2 = \max \{ \|a(x)\|, \|a(x+h)\| \} \frac{4}{h^2} + \|c(x)\|$$

зависит от шага дискретизации, т. е.  $M_2 = M_2(h)$ , причем с уменьшением  $h$  она растет.

С учетом (6.11), (6.12) из (6.8)–(6.10) получим искомую оценку для погрешности

$$\|z(x)\| \leq M_1 h^\beta + M_2(h) \delta. \quad (6.13)$$

Отсюда следует, что для сходимости приближенного решения при  $\delta \rightarrow 0$  необходимо, чтобы  $\delta h^{-2} \rightarrow 0$ .

В классах априорных предположений о решении (6.6) и (6.7) из оценки (6.13) получим оптимальный выбор шага дискретизации и скорость сходимости

$$h_{\text{opt}} = O(\delta^{1/4}), \quad \|z(x)\| = O(\delta^{1/2})$$

при условии (6.6) ( $\beta = 2$ ) и

$$h_{\text{opt}} = O(\delta^{1/3}), \quad \|z(x)\| = O(\delta^{1/3})$$

при условии (6.7) ( $\beta = 1$ ).

Тем самым показано, что шаг дискретизации  $h$  при разностном вычислении правой части выступает в качестве параметра регуляризации. Его величина должна быть согласована с погрешностью во входных данных  $\delta$ . Оптимальное значение шага дискретизации зависит от постоянных  $M_1, M_2$ , т. е.  $h_{\text{opt}} = h_{\text{opt}}(M_1, M_2)$ . Чаще всего прямое вычисление этих постоянных не представляется возможным, поэтому в таких случаях можно ориентироваться на использование выбора шага дискретизации по критерию невязки.

При численном решении неустойчивых задач дискретизация (переход к конечномерной задаче) всегда приносит эффект регуляризации. Это замечание относится как к сеточным методам, так и к проекционным методам. При этом в качестве параметра дискретизации выступает размерность задачи (шаг дискретизации). Можно говорить, что численные методы обладают свойством саморегуляризации. Однако при попытке увеличить размерность задачи для получения приближенного решения с большей точностью мы с некоторого момента получаем все более и более плохие результаты — проявляется некорректность задачи. Поэтому нужно вовремя остановиться, ограничиться приближенным решением при некоторой оптимальной дискретизации.

Возможности регуляризации за счет дискретизации достаточно ограниченные. В вычислительной практике обычно идут по другому пути. Используются методы, в которых регуляризирующие свойства имеют место для непрерывной задачи. При дискретизации явно не отслеживается близость дискретной задачи к регуляризованной дифференциальной задаче за счет, например, использования достаточно подробных сеток. В этом случае дополнительные регуляризирующие свойства за счет дискретизации не учитываются по причине их незначительного влияния. Возможен и более аккуратный учет погрешностей дискретизации, когда влиянием погрешностей аппроксимации нельзя пренебречь. В частности, выбор параметра регуляризации согласуется не только с погрешностью в задании правой части, но и с погрешностью в задании оператора при приближенном решении операторного уравнения первого рода — **принцип обобщенной невязки**.

### 6.1.3. Регуляризация по А. Н. Тихонову

Будем рассматривать задачу (6.2)–(6.4) на операторном уровне. На множестве функций, обращающихся в нуль на концах отрезка  $[0, l]$  (см. (6.2)) определим оператор  $\mathcal{D}$  по правилу

$$\mathcal{D}u = -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u.$$

Тогда задачу (6.2), (6.3) при точных входных данных можно записать в виде

$$f = \mathcal{D}u. \quad (6.14)$$

В  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, l)$  оператор

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq mE, \quad m = \kappa \frac{\pi^2}{l^2}.$$

В силу этого  $\mathcal{D}^{-1}$  существует и

$$0 < \mathcal{D}^{-1} \leq \frac{1}{m}E.$$

Это дает возможность от уравнения (6.14) перейти к уравнению

$$\mathcal{A}f = u, \quad (6.15)$$

где  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* = \mathcal{D}^{-1}$ .

Вместо точной правой части (6.15) известна  $u_\delta$ , причем уровень погрешности контролируется неравенством

$$\|u_\delta - u\| \leq \delta, \quad (6.16)$$

где

$$\|u(x)\|^2 = \int_0^e u^2(x) dx.$$

Задача (6.15), (6.16) рассматривалась нами ранее. Для ее устойчивого решения можем применить метод регуляризации А. Н. Тихонова. В этом случае приближенное решение  $f_\alpha$ ,  $\alpha = \alpha(\delta)$  определяется из

$$J_\alpha(f_\alpha) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha(v), \quad (6.17)$$

где

$$J_\alpha(v) = \|\mathcal{A}v - u_\delta\|^2 + \alpha\|v\|^2. \quad (6.18)$$

Функционал (6.18) с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$J_\alpha(v) = \|\mathcal{D}^{-1}v - u_\delta\|^2 + \alpha\|v\|^2.$$

Его неудобство связано с тем, что вычислять значения оператора  $\mathcal{D}$  проще, чем его обращать. Можно вместо (6.18) использовать несколько более общий функционал

$$J_\alpha(v) = \|\mathcal{D}^{-1}v - u_\delta\|_{\mathcal{G}}^2 + \alpha\|v\|_{\mathcal{G}}^2$$

с  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^* > 0$ . Положим  $\mathcal{G} = \mathcal{D}^*\mathcal{D}$ , тогда

$$J_\alpha(v) = \|v - \mathcal{D}u_\delta\|^2 + \alpha\|\mathcal{D}v\|^2. \quad (6.19)$$

Тем самым мы приходим к варианту метода регуляризации А. Н. Тихонова для приближенного решения задачи (6.14), (6.16), который основан на решении вариационной задачи (6.17), (6.19). Для того чтобы прояснить ситуацию с этим алгоритмом, мы рассмотрели промежуточную задачу (6.15), (6.16).

Обоснование метода (6.17), (6.19) при приближенном решении задачи (6.14), (6.16) проводится по той же схеме, как это делается при приближенном решении задачи (6.15), (6.16) методом (6.17), (6.18). Это позволяет нам не останавливаться на этом вопросе.

Уравнение Эйлера для (6.17), (6.19) имеет вид

$$(E + \alpha\mathcal{D}^*\mathcal{D})f_\alpha = \mathcal{D}u_\delta. \quad (6.20)$$

В рассматриваемом примере (6.2)–(6.4) уравнение (6.20) дает краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Для решения уравнения (6.20) справедлива типовая априорная оценка

$$\|f_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \|u_\delta\|, \quad (6.21)$$

выражающая устойчивость приближенного решения к малым возмущениям правой части.

### 6.1.4. Другие алгоритмы

Отметим некоторые другие возможности по приближенному решению задачи (6.14), (6.16). Прежде всего можно дать несколько иную интерпретацию метода регуляризации А. Н. Тихонова, когда приближенное решение находится из уравнения (6.20).

На первом шаге определим вспомогательную функцию

$$\tilde{f} = \mathcal{D}u_\delta. \quad (6.22)$$

Тем самым  $\tilde{f}$  есть решение задачи при зашумленной правой части. Второй шаг связан с обработкой этого найденного решения. Такой обработкой служит сглаживание, наиболее естественный вариант которого состоит в минимизации функционала

$$J_\alpha(v) = \|v - \tilde{f}\|^2 + \|v\|_{\mathcal{G}}^2. \quad (6.23)$$

Условие минимума этого функционала дает

$$(E + \alpha\mathcal{G})f_\alpha = \tilde{f}. \quad (6.24)$$

При такой интерпретации метод (6.17), (6.19) соответствует выбору  $\mathcal{G} = \mathcal{D}^*\mathcal{D}$  в (6.17), (6.22), (6.23).

При выборе

$$\mathcal{G} \geq \mathcal{D}^*\mathcal{D}$$

для решения задачи (6.22), (6.24) справедлива оценка (6.21). Укажем одну такую возможность, которая может быть интересной прежде всего с вычислительной точки зрения. В рассматриваемом нами случае  $\mathcal{G} = \mathcal{D}^2$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{D}^*\mathcal{D} > 0$  и реализация связана с обращением оператора  $E + \alpha\mathcal{G}$ . В нашей модельной задаче необходимо решать краевую задачу для уравнения четвертого порядка. При

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}^2 + 2\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathcal{D}$$

уравнение (6.24) принимает вид

$$(E + \sqrt{\alpha}\mathcal{D})^2 f_\alpha = \tilde{f}. \quad (6.25)$$

Тем самым можно ограничиться двукратным обращением оператора  $E + \sqrt{\alpha}\mathcal{D}$  (решением двух краевых задач для уравнения второго порядка). Отметим, что алгоритм (6.22), (6.25) можно рассматривать как двукратное сглаживание с оператором  $\mathcal{G} = \mathcal{D}$ .

Отдельного и подробного обсуждения заслуживают итерационные методы. Здесь мы ограничимся лишь небольшим комментарием. Для

нахождения приближенного решения  $f_{n(\delta)}$  задачи (6.15), (6.16) можно применить метод простой итерации

$$\frac{f_{k+1} - f_k}{\tau} + \mathcal{A}f_k = u_\delta, \quad k = 0, 1, \dots,$$

который подробно рассматривался нами выше. Возвращаясь к задаче (6.14), (6.16) перепишем итерационный процесс в виде

$$\mathcal{D} \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau} + f_k = \mathcal{D}u_\delta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.26)$$

Тем самым для решения задачи на новом итерационном шаге необходимо обращать оператор  $\mathcal{D}$ . Эффект регуляризации обеспечивается выбором переобуславливателя  $B = \mathcal{D}$ .

### 6.1.5. Вычислительная и программная реализация

Вычислительный алгоритм для решения задачи (6.14), (6.16) построим на основе использования метода регуляризации А. Н. Тихонова (6.17), (6.19). Сначала перейдем к дискретной задаче, считая, что шаг дискретизации достаточно мал.

На множестве сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}$  и обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , определим сеточный оператор

$$Dy = -(ay_{\bar{x}})_x + cy, \quad x \in \omega.$$

После дискретизации от задачи (6.14) придем к задаче

$$\varphi = Dy. \quad (6.27)$$

Вместо сеточной функции  $y(x)$ ,  $x \in \omega$ , задана функция  $y_\delta(x)$ ,  $x \in \omega$ . Уровень погрешности определяется величиной  $\delta$ :

$$\|y_\delta - y\| \leq \delta, \quad (6.28)$$

где  $\|\cdot\|$  — норма в  $H = L_2(\omega)$ :

$$\|y\| = (y, y)^{1/2}, \quad (y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x)v(x)h.$$

В  $H$  оператор

$$D = D^* \geq \kappa\lambda_0 E, \quad \lambda_0 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}.$$

Метод А. Н. Тихонова, примененный к задаче (6.27), (6.28), приводит (см. (6.20)) к уравнению

$$(E + \alpha D^2)\varphi_\alpha = Dy_\delta \quad (6.29)$$

для нахождения приближенного решения  $\varphi_\alpha(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}$ . Параметр регуляризации  $\alpha = \alpha(\delta)$  находится в соответствии с принципом невязки:

$$\|y_\delta - D^{-1}\varphi_\alpha\| = \delta. \quad (6.30)$$

Отметим некоторые особенности вычислительной реализации рассматриваемого метода.

Уравнение (6.29) есть сеточное уравнение с пятидиагональной матрицей. Для ее решения используется метод прогонки (алгоритм Томаса). Приведем расчетные формулы метода прогонки для решения следующей пятидиагональной системы уравнений

$$C_0y_0 - D_0y_1 + E_0y_2 = F_0, \quad (6.31)$$

$$-B_1y_0 + C_1y_1 - D_1y_2 + E_1y_3 = F_1, \quad (6.32)$$

$$A_iy_{i-2} - B_iy_{i-1} + C_iy_i - D_iy_{i+1} + E_iy_{i+2} = F_i, \quad (6.33)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-2,$$

$$A_{N-1}y_{N-3} - B_{N-1}y_{N-2} + C_{N-1}y_{N-1} - D_{N-1}y_N = F_{N-1}, \quad (6.34)$$

$$A_Ny_{N-2} - B_Ny_{N-1} + C_Ny_N = F_N. \quad (6.35)$$

Метод прогонки для системы уравнений (6.31)–(6.35) основан на представлении решения в виде

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} - \beta_{i+1}y_{i+2} + \gamma_{i+1}, \quad (6.36)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-2,$$

$$y_{N-1} = \alpha_Ny_N + \gamma_N. \quad (6.37)$$

Как и в обычной трехточечной прогонке сначала найдем прогоночные коэффициенты. Выразим, используя (6.36),  $y_{i-1}$  и  $y_{i-2}$  через  $y_i$  и  $y_{i+1}$ :

$$y_{i-1} = \alpha_iy_i - \beta_iy_{i+1} + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.38)$$

$$y_{i-2} = (\alpha_i\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})y_i - \beta_i\alpha_{i-1}y_{i+1} + \alpha_{i-1}\gamma_i + \gamma_{i-1}, \quad (6.39)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1.$$

Подстановка (6.38), (6.39) в (6.33) дает

$$(C_i - A_i\beta_{i-1} + \alpha_i(A_i\alpha_{i-1} - B_i))y_i = (D_i + \beta_i(A_i\alpha_{i-1} - B_i))y_{i+1} - E_iy_{i+2} + F_i - A_i\gamma_{i-1} - \gamma_i(A_i\alpha_{i-1} - B_i), \quad i = 2, 3, \dots, N-2.$$

С учетом представления (6.36) получим

$$\alpha_{i+1} = S_i^{-1}(D_i + \beta_i(A_i\alpha_{i-1} - B_i)),$$

$$\beta_{i+1} = S_i^{-1}E_i, \quad (6.40)$$

$$\gamma_{i+1} = S_i^{-1}(F_i - A_i\gamma_{i-1} - \gamma_i(A_i\alpha_{i-1} - B_i)),$$



где

$$S_i = (C_i - A_i \beta_{i-1} + \alpha_i (A_i \alpha_{i-1} - B_i)), \quad i = 2, 3, \dots, N-2. \quad (6.41)$$

Для того чтобы воспользоваться рекуррентными соотношениями (6.40), (6.41), необходимо задать коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  при  $i = 1, 2$ . Из (6.31) и (6.36) следует

$$\alpha_1 = C_0^{-1} D_0, \quad \beta_1 = C_0^{-1} E_0, \quad \gamma_1 = C_0^{-1} F_0. \quad (6.42)$$

Подставляя (6.38) при  $i = 1$  в (6.32), получим

$$(C_1 - B_1 \alpha_1) y_1 = (D_1 - B_1 \beta_1) y_2 - E_1 y_3 + F_1 + B_1 \gamma_1.$$

Поэтому можем положить

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= S_1^{-1} (D_1 - B_1 \beta_1), & S_1 &= C_1 - B_1 \alpha_1, \\ \beta_2 &= S_1^{-1} E_1, \\ \gamma_2 &= S_1^{-1} (F_1 + B_1 \gamma_1). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha_N, \gamma_N$  в представлении (6.37) подставим (6.38), (6.39) при  $i = N-1$  в (6.34). Это дает те же формулы (6.40), (6.41) при  $i = N-1$ . Тем самым, по рекуррентным формулам (6.40), (6.41) с учетом (6.42), (6.43) находятся все прогоночные коэффициенты.

Для нахождения решения по (6.36), (6.37) нужно найти  $y_N$ . Для этого используется уравнение (6.35). Подставляя (6.36) при  $i = N-2$ , получим

$$y_N = \gamma_{N+1}, \quad (6.44)$$

где  $\gamma_{N+1}$  определяется согласно (6.40), (6.41) при  $i = N$ . Равенство (6.44) позволяет по (6.36), (6.37) найти решение системы (6.31)–(6.35).

Описанный алгоритм реализован в подпрограмме PROG5.

#### Подпрограмма PROG5

```

SUBROUTINE PROG5 ( N, A, B, C, D, E, F, Y, ITASK )
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C   МЕТОД ПРОГОНКИ
C   ДЛЯ ПЯТИДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ
C
C   ITASK = 1: ФАКТОРИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ;
C
C   ITASK = 2: ТОЛЬКО РЕШЕНИЕ
C
  DIMENSION A(N), B(N), C(N), D(N), E(N), F(N), Y(N)
  IF (ITASK .EQ. 1) THEN
C
  D(1) = D(1) / C(1)

```

```

E(1) = E(1) / C(1)
C(2) = C(2) - D(1)*B(2)
D(2) = (D(2) - E(1)*B(2)) / C(2)
E(2) = E(2) / C(2)
C
DO I = 3, N
  C(I) = C(I) - E(I-2)*A(I) + D(I-1)*(D(I-2)*A(I) - B(I))
  D(I) = (D(I) + E(I-1)*(D(I-2)*A(I) - B(I))) / C(I)
  E(I) = E(I) / C(I)
END DO
C
ITASK = 2
END IF
C
F(1) = F(1) / C(1)
F(2) = (F(2) + F(1)*B(2)) / C(2)
DO I = 3, N
  F(I) = (F(I) - F(I-2)*A(I)
*      - F(I-1)*(D(I-2)*A(I) - B(I))) / C(I)
END DO
C
Y(N) = F(N)
Y(N-1) = D(N-1)*Y(N) + F(N-1)
DO I = N-2, 1, -1
  Y(I) = D(I)*Y(I+1) - E(I)*Y(I+2) + F(I)
END DO
RETURN
END

```

Задача идентификации решалась в рамках квазиреального эксперимента. Сначала численно решалась прямая задача (6.1), (6.2) при заданных коэффициентах и правой части, после чего в это сеточное решение вносились случайные возмущения и потом решалась уже обратная задача. Для нахождения разностного решения прямой задачи использовался метод прогонки для трехдиагональных матриц. В подпрограмме PROG3 как и в случае PROG5 элементы матрицы не сохраняются на выходе (на их месте находятся прогоночные коэффициенты).

#### Подпрограмма PROG3

```

SUBROUTINE PROG3 ( N, A, C, B, F, Y, ITASK )
IMPLICIT REAL*8 ( A-N, 0-Z )
C
C  МЕТОД ПРОГОНКИ
C  ДЛЯ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ
C
C  ITASK = 1: ФАКТОРИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ;
C
C  ITASK = 2: ТОЛЬКО РЕШЕНИЕ
C
DIMENSION A(N), C(N), B(N), F(N), Y(N)

```

```

      IF (ITASK .EQ. 1) THEN
C
      B(1) = B(1) / C(1)
      DO I = 2, N
          C(I) = C(I) - B(I-1)*A(I)
          B(I) = B(I) / C(I)
      END DO
C
      ITASK = 2
      END IF
C
      F(1) = F(1) / C(1)
      DO I = 2, N
          F(I) = (F(I) + F(I-1)*A(I)) / C(I)
      END DO
C
      Y(N) = F(N)
      DO I = N-1, 1, -1
          Y(I) = B(I)*Y(I+1) + F(I)
      END DO
      RETURN
      END

```

Для нахождения параметра регуляризации по невязке использовалась последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0,$$

с заданными начальным значением  $\alpha_0$  и множителем  $q$ .

#### Программа PROBLEM5

```

C
C   PROBLEM5 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C             СТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-N, O-Z )
      PARAMETER ( DELTA = 0.001D0, N = 201 )
      DIMENSION Y(N), X(N), YD(N), F(N), FA(N), FT(N),
+             A(N), B(N), C(N), D(N), E(N), FF(N)
C
      ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR   - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   N        - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   ALPHA    - НАЧАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ;
C   Q        - МНОЖИТЕЛЬ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ;
C   Y(N)     - ТОЧНОЕ РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ;
C   YD(N)    - ВОЗМУЩЕННОЕ РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ;
C   F(N)     - ТОЧНАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ;
C   FA(N)    - РАССЧИТАННАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ;
C

```

```

XL = 0.
XR = 1.
C
OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C     СЕТКА
C
H = (XR - XL) / (N - 1)
DO I = 1, N
    X(I) = XL + (I-1)*H
END DO
C
C     КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
B(1) = 0.DO
C(1) = 1.DO
FF(1) = 0.DO
A(N) = 0.DO
C(N) = 1.DO
FF(N) = 0.DO
DO I = 2,N-1
    A(I) = AK(X(I)-0.5DO*H) / (H*H)
    B(I) = AK(X(I)+0.5DO*H) / (H*H)
    C(I) = A(I) + B(I) + AQ(X(I))
    FF(I) = AF(X(I))
END DO
C
C     РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
ITASK1 = 1
CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, Y, ITASK1 )
C
C     ЗАШУМЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
C
YD(1) = 0.DO
YD(N) = 0.DO
DO I = 2,N-1
    YD(I) = Y(I) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
END DO
C
C     ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
FT(1) = 0.DO
FT(N) = 0.DO
DO I = 2,N-1
    FT(I) = - AK(X(I)-0.5DO*H) * YD(I-1) / (H*H) +
+ ((AK(X(I)-0.5DO*H) + AK(X(I)+0.5DO*H)) / (H*H) +
+ AQ(X(I))) * YD(I) -
+ AK(X(I)+0.5DO*H) * YD(I+1) / (H*H)
END DO
WRITE ( 01,* ) (X(I), I = 1,N)
WRITE ( 01,* ) (Y(I), I = 1,N)
WRITE ( 01,* ) (YD(I), I = 1,N)

```

```

WRITE ( 01,* ) (FT(I), I = 1,N)
C
C ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПО ПОДБОРУ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C
IT = 0
ITMAX = 1000
ALPHA = 0.001D0
Q = 0.75D0
100 IT = IT + 1
C
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
C
C(1) = 1.D0
D(1) = 0.D0
E(1) = 0.D0
B(2) = 0.D0
C(2) = ALPHA*(AK(X(2)+0.5D0*H) / (H**2)) **2 +
+ ALPHA*((AK(X(2)-0.5D0*H) +
+ AK(X(2)+0.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(2)))**2 + 1.D0
D(2) = ALPHA*AK(X(2)+0.5D0*H) / (H**2) *
+ ((AK(X(2)+0.5D0*H) +
+ AK(X(2)+1.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(3)) +
+ (AK(X(2)-0.5D0*H) +
+ AK(X(2)+0.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(2)))
E(2) = ALPHA*AK(X(2)+0.5D0*H)* AK(X(2)+1.5D0*H) / (H**4)
A(N-1) = ALPHA*AK(X(N-1)-0.5D0*H)* AK(X(N-1)-1.5D0*H) / (H**4)
B(N-1) = ALPHA*AK(X(N-1)-0.5D0*H) / (H**2) *
+ ((AK(X(N-1)-0.5D0*H) + AK(X(N-1)-1.5D0*H))/(H**2) +
+ AQ(X(N-2)) +
+ (AK(X(N-1)-0.5D0*H) + AK(X(N-1)+0.5D0*H))/(H**2) +
+ AQ(X(N-1)))
C(N-1) = ALPHA*(AK(X(N-1)-0.5D0*H) / (H**2)) **2 +
+ ALPHA*((AK(X(N-1)-0.5D0*H) +
+ AK(X(N-1)+0.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(N-1)))**2 + 1.D0
D(N-1) = 0.D0
A(N) = 0.D0
B(N) = 0.D0
C(N) = 1.D0
DO I = 2,N-2
A(I) = ALPHA*AK(X(I)-0.5D0*H)* AK(X(I)-1.5D0*H) / (H**4)
B(I) = ALPHA*AK(X(I)-0.5D0*H) / (H**2) *
+ ((AK(X(I)-0.5D0*H) + AK(X(I)-1.5D0*H))/(H**2) +
+ AQ(X(I-1)) +
+ (AK(X(I)-0.5D0*H) + AK(X(I)+0.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(I)))
C(I) = ALPHA*(AK(X(I)-0.5D0*H) / (H**2)) **2 +
+ ALPHA*(AK(X(I)+0.5D0*H) / (H**2)) **2 +
+ ALPHA*((AK(X(I)-0.5D0*H) +
+ AK(X(I)+0.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(I)))**2 + 1.D0
D(I) = ALPHA*AK(X(I)+0.5D0*H) / (H**2) *
+ ((AK(X(I)+0.5D0*H) + AK(X(I)+1.5D0*H))/(H**2) +
+ AQ(X(I+1)) +
+ (AK(X(I)-0.5D0*H) + AK(X(I)+0.5D0*H))/(H**2) + AQ(X(I)))
E(I) = ALPHA*AK(X(I)+0.5D0*H)* AK(X(I)+1.5D0*H) / (H**4)

```

```

      END DO
C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      ITASK2 = 1
      DO I = 1,N
         FF(I) = FT(I)
      END DO
C
      CALL PROG5 ( N, A, B, C, D, E, FF, FA, ITASK2 )
C
C   НЕВЯЗКА
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      FF(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      FF(N) = 0.DO
      DO I = 2,N-1
         A(I) = AK(X(I)-0.5DO*H) / (H*H)
         B(I) = AK(X(I)+0.5DO*H) / (H*H)
         C(I) = A(I) + B(I) + AQ(X(I))
         FF(I) = FA(I)
      END DO
C
      ITASK1 = 1
C
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, D, ITASK1 )
C
      SUM = 0.DO
      DO I = 2,N-1
         SUM = SUM + (D(I)-YD(I))**2*H
      END DO
      SL2 = DSQRT(SUM)
C
      IF (IT.EQ.1) THEN
         IND = 0
         IF (SL2.LT.DELTA) THEN
            IND = 1
            Q = 1.DO/Q
            END IF
            ALPHA = ALPHA*Q
            GO TO 100
         ELSE
            ALPHA = ALPHA*Q
            IF (IND.EQ.0 .AND. SL2.GT.DELTA) GO TO 100
            IF (IND.EQ.1 .AND. SL2.LT.DELTA) GO TO 100
         END IF
C
C   РЕШЕНИЕ
C
      WRITE ( 01,* ) (FA(I), I=1,N)

```

```

WRITE ( 01,* ) IT, ALPHA, SL2
CLOSE ( 01 )
C
STOP END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AK ( X )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C      КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ
C
AK = 0.05D0
C
RETURN END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AQ ( X )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C      КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ
C
AQ = 0.D0
C
RETURN END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AF ( X )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ
C
AF = X
IF (X.GE.0.5D0) AF = 0.5D0
C
RETURN
END

```

Коэффициенты уравнения и правая часть задаются в подпрограммах-функциях AK, AQ, AF.

### 6.1.6. Примеры расчетов

Рассматривалась модельная задача (6.1), (6.2) с

$$k(x) = 0,05, \quad q(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 0,5, \\ 0,5, & 0,5 < x < 1. \end{cases}$$

Погрешности в задании входных данных моделировались возмущением разностного решения задачи при точной правой части в узлах сетки:

$$y_\delta(x) = y(x) + 2\delta \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \right), \quad x = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $\sigma(x)$  — нормально распределенная от 0 до 1 случайная величина.

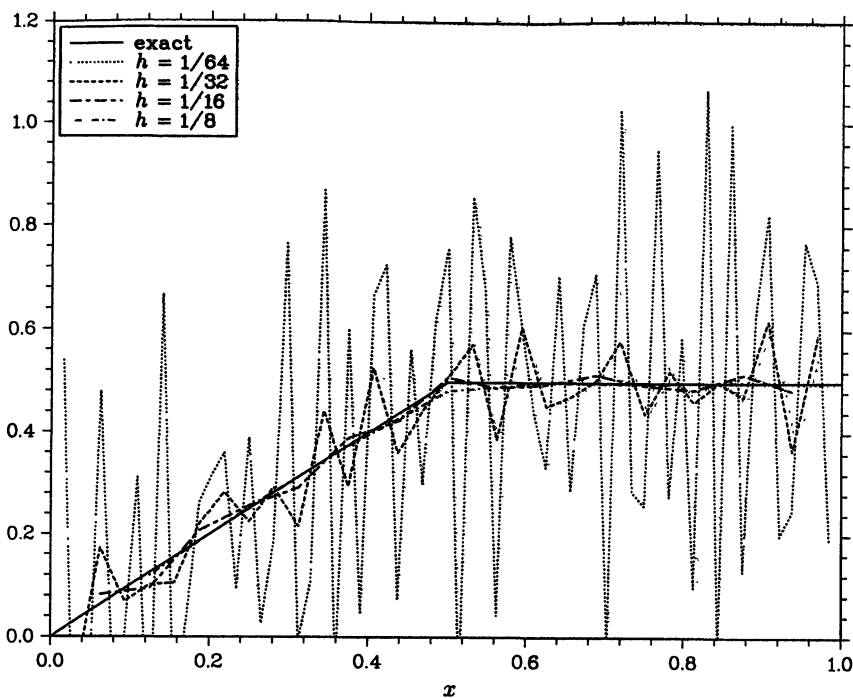


Рис. 6.1. Численное дифференцирование при  $\delta = 0,001$

Сначала отметим некоторые возможности прямого разностного дифференцирования при вычислении правой части уравнения (6.1). На рис. 6.1 представлены результаты при использовании различных разностных сеток. Данные получены при возмущении решения прямой задачи на сетке с  $N = 512$ , уровень зашумления задавался параметром  $\delta = 0,001$ . Приемлемые результаты можно получить при использовании численного дифференцирования на достаточно грубых сетках  $h \geq 1/16$ .

Решение той же задачи идентификации с использованием метода А. Н. Тихонова показано на рис. 6.2. Использовалась расчетная сетка с  $N = 200$ . Влияние уровня погрешности можно проследить по результатам расчетов с погрешностью  $\delta = 0,01$  во входных данных, которые представлены на рис. 6.3 (с. 197). Необходимо отметить наиболее сильную потерю точности вблизи правой границы  $x = l$ . Это связано с тем, что оператор  $\mathcal{D}$ , значения которого вычисляются, определен на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (6.2). Если этим же условиям удовлетворяет и искомая правая часть, то можно рассчитывать на большую точность приближенного решения. Иллюстрацией этого



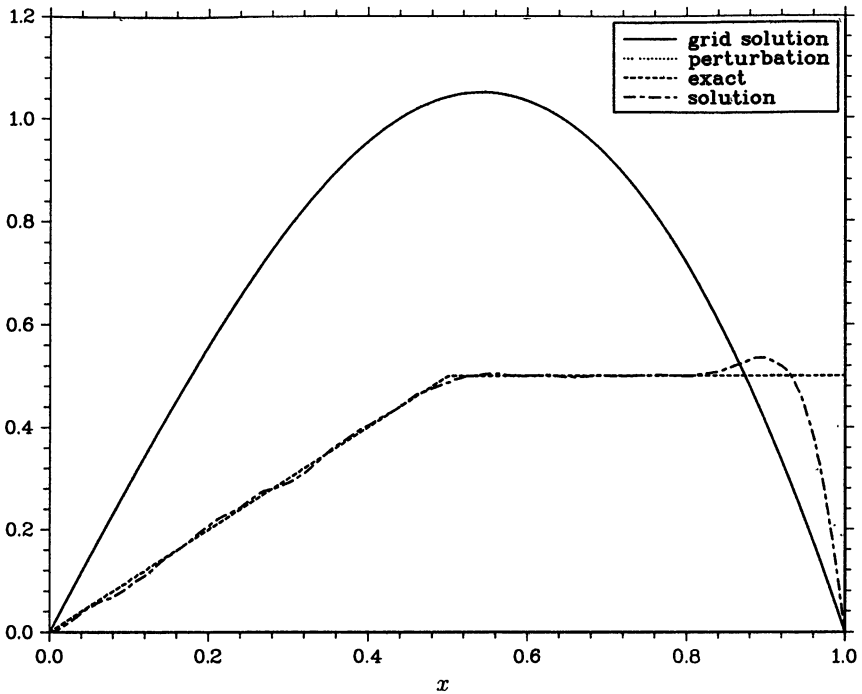


Рис. 6.2. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,001$

служит рис. 6.4 (с. 198), на котором показано решение задачи идентификации несколько другой правой части.

## 6.2. Идентификация правой части параболического уравнения

Рассматривается обратная задача восстановления правой части одномерного параболического уравнения по известному решению. Отмечаются особенности такой задачи, связанные с эволюционностью задачи, с возможностью последовательного определения правой части при возрастании времени.

### 6.2.1. Модельная задача

В качестве модельной рассмотрим задачу восстановления правой части одномерного параболического уравнения. Начнем с постановки прямой задачи.

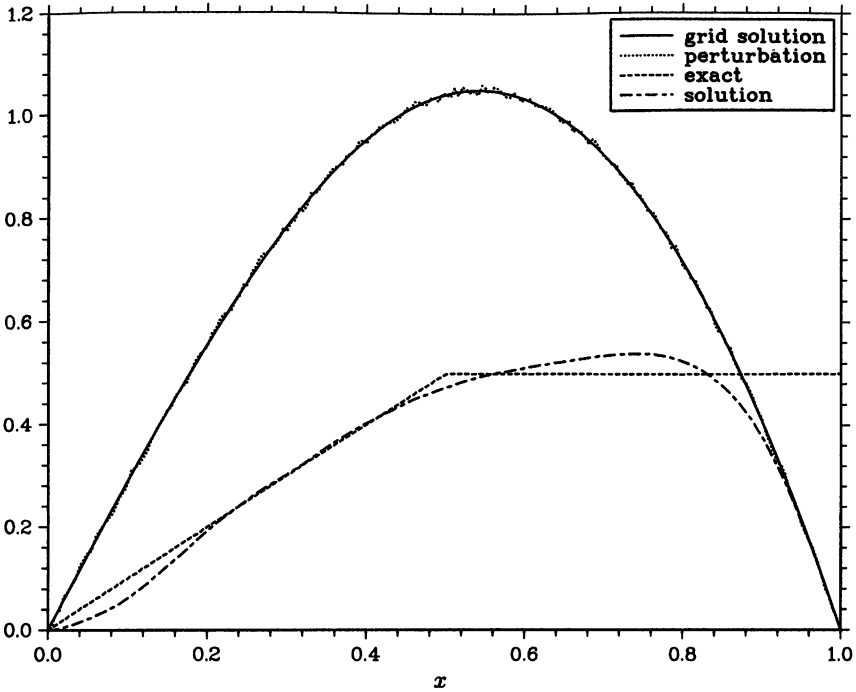


Рис. 6.3. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,01$

Решение  $u(x, t)$  определяется в прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (6.45)$$

при стандартных ограничениях  $k(x) \geq \kappa > 0$ .

Граничные и начальные условия для простоты возьмем однородными

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (6.46)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6.47)$$

В прямой задаче (6.45)–(6.47) решение  $u(x, t)$  определяется по известным коэффициенту  $k(x)$  и правой части  $f(x, t)$ . В рассматриваемой обратной задаче неизвестной будет правая часть  $f(x, t)$  (мощность

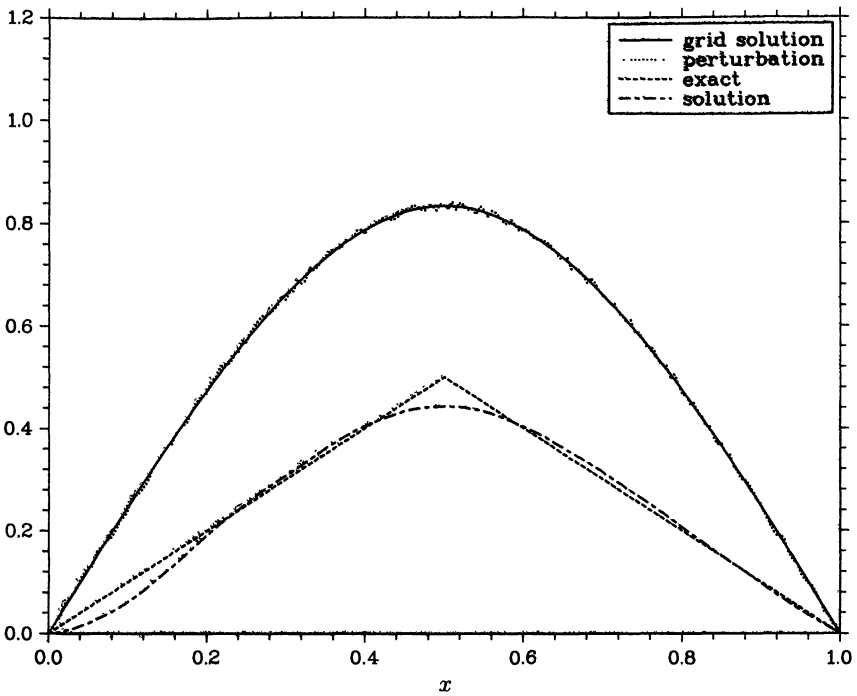


Рис. 6.4. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,01$

источников), но само решение  $u(x, t)$  предполагается известным. Для вычисления правой части имеем из (6.45) явную формулу

$$f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (6.48)$$

Входные данные заданы с погрешностью, и поэтому прямое использование (6.48) затруднительно. Наиболее принципиальным является влияние неточного задания решения. Пусть вместо точного решения задачи (6.45)–(6.47)  $u(x, t)$  известна функция  $u_\delta(x, t)$ , причем в некоторой норме параметр  $\delta$  определяет уровень погрешностей в задании решения, т. е.

$$\|u_\delta(x, t) - u(x, t)\| \leq \delta. \quad (6.49)$$

Необходимо использовать специальные вычислительные алгоритмы устойчивого численного дифференцирования. Для приближенного решения можно использовать алгоритмы конечно-разностной регуляризации, когда в качестве параметра регуляризации выступают шаги дискретизации. Подробное обсуждение такого метода дано выше при рассмотрении

стационарной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. При решении обратной задачи (6.46)–(6.49) необходимо согласовывать с погрешностью в задании  $u(x, t)$  шаг дискретизации по пространству и по времени.

Эволюционные задачи обладают определенной и весьма существенной спецификой. Решение задачи на текущий момент времени зависит только от предыстории, от решения на предшествующие моменты времени и не зависит от решения на последующие моменты времени. Такая особенность эволюционных задач может (и часто просто обязана) учитываться при построении вычислительных алгоритмов. Это абсолютно оправдано при рассмотрении прямых задач типа (6.45)–(6.47), это может быть также важно при рассмотрении обратных задач, подобных (6.46)–(6.49).

При решении эволюционных задач в общем контексте мы можем говорить о двух типах вычислительных алгоритмов. Первые из них основаны на определении решения по решению на предшествующие моменты времени. В этом случае мы будем говорить о **локальных алгоритмах решения эволюционных задач**. В **глобальных алгоритмах** для нахождения решения на заданный момент задействованы будущие моменты времени.

### 6.2.2. Глобальная регуляризация

Будем использовать общую схему регуляризации по А. Н. Тихонову для приближенного решения обратной задачи (6.46)–(6.49). Начнем с того, что введем некоторые обозначения.

В гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  норму и скалярное произведение введем обычным образом:

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx, \quad \|v\|^2 = (v, v) = \int_{\Omega} v^2(x) dx.$$

Для функций  $v(x, t), w(x, t) \in \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(Q_T)$  положим

$$(v, w)^* = \int_0^T (v, w) dt = \int_0^T \int_{\Omega} v(x)w(x) dx dt, \quad \|v\|^* = ((v, v)^*)^{1/2}.$$

Определим оператор

$$Au = -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right)$$

на множестве функций, удовлетворяющих (6.46). В  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  оператор

$$A = \mathcal{A}^* \geq mE, \quad m = \kappa \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Обратная задача (6.46)–(6.48) записывается в виде

$$f = \mathcal{D}u, \quad (6.50)$$

где оператор

$$\mathcal{D}u = \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u \quad (6.51)$$

определен на множестве функций, удовлетворяющих начальному условию (6.47). Для входных данных (см. (6.49)) имеем

$$\|u_\delta - u\|^* \leq \delta. \quad (6.52)$$

При использовании метода регуляризации А. Н. Тихонова приближенное решение  $f_\alpha$  задачи (6.50)–(6.52) определяется как решение следующей вариационной задачи:

$$(E + \alpha \mathcal{D}^* \mathcal{D})f_\alpha = \mathcal{D}u_\delta. \quad (6.53)$$

Специфика применения метода регуляризации к решению рассматриваемой обратной эволюционной задачи проявляется в операторе задачи  $\mathcal{D}$ , определяемом согласно (6.51). В частности, необходимо явно определить оператор  $\mathcal{D}^*$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}v, w)^* &= \int_0^T \left( \frac{dv}{dt}, w \right) dt + \int_0^T (\mathcal{A}v, w) dt = \\ &= (v, w) \Big|_0^T - \int_0^T \left( v, \frac{dw}{dt}, w \right) dt + \int_0^T (\mathcal{A}w, v) dt = (v, \mathcal{D}w)^* \end{aligned}$$

при условии, что  $v(x, 0) = 0$ , а  $w(x, T) = 0$ . Тем самым оператор  $\mathcal{D}^*$  определяем как

$$\mathcal{D}^*w = -\frac{dw}{dt} + \mathcal{A}w \quad (6.54)$$

на множестве функций

$$w(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6.55)$$

С учетом (6.47), (6.51), (6.54), (6.55) уравнение (6.53) для нахождения приближенного решения  $f_\alpha$  есть эллиптическое уравнение, которое включает вторые производные по времени и четвертые по пространству. Для  $f_\alpha$  реализуются следующие граничные условия при  $t = 0, T$ :

$$f_\alpha(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6.56)$$

$$\mathcal{D}f_\alpha(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6.57)$$

Эти моменты должны аккуратно отслеживаться при численной реализации рассматриваемого подхода.

При рассмотрении задачи идентификации правой части обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка отмечены две основные возможности. Первая из них связана с применением схемы регуляризации А. Н. Тихонова при интерпретации рассматриваемой задачи идентификации правой части как задачи решения операторного уравнения первого рода, вторая — как задачи вычисления значений неограниченного оператора. Эта последняя возможность реализована в схеме (6.52), (6.53) при приближенном решении задачи (6.46)–(6.49). Имеет смысл также остановиться на стандартном варианте регуляризации А. Н. Тихонова.

По заданной правой части  $f(x, t)$  из решения краевой задачи (6.45)–(6.47) однозначно определяется  $u(x, t)$ . Это соответствие отобразим введением оператора  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G}f = u. \quad (6.58)$$

Вместо  $u(x, t)$  задана функция  $u_\delta(x, t)$ , причем выполнена оценка (6.52).

Приближенное решение  $f_\alpha$  задачи (6.49), (6.58) определяется как решение следующей задачи:

$$J_\alpha(f_\alpha) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha(v), \quad (6.59)$$

где

$$J_\alpha(v) = (\|\mathcal{G}v - u_\delta\|^*)^2 + \alpha(\|v\|^*)^2. \quad (6.60)$$

Необходимо отметить следующее важное обстоятельство. При использовании алгоритма (6.52), (6.53), построенного на основе интерпретации задачи идентификации как задачи вычисления значений неограниченного оператора, ставятся дополнительные ограничения на искомую функцию (граничные условия типа (6.56), (6.57)). Это не совсем оправдано (см. результаты численных экспериментов по идентификации правой части обыкновенного дифференциального уравнения в предыдущем параграфе). При использовании (6.59), (6.60) такие проблемы не возникают.

### 6.2.3. Локальная регуляризация

При приближенном решении задачи идентификации правой части нестационарного уравнения по известному решению часто удобнее ориентироваться на алгоритмы определения правой части на заданный момент времени с использованием входной информации только на предшествующие моменты времени. По сравнению с алгоритмами глобальной регуляризации в этом случае мы, вообще говоря, теряем в точности приближенного решения, но приобретаем в плане оперативности. Отметим некоторые основные возможности по построению алгоритмов локальной регуляризации для приближенного решения обратной задачи (6.46)–(6.49). Мы остановимся на локальном аналоге регуляризации типа (6.59), (6.60).

Основная идея связана с тем, что правая часть определяется по решению на каждый фиксированный момент времени. Другими словами, регуляризация процедуры численного дифференцирования проводится только по пространственным переменным. Фактически сглаживаются входные данные только по части переменных. Такого типа алгоритмы реализуются при предварительной дискретизации по времени.

Введем равномерную сетку по времени

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\}.$$

Будем использовать следующие основные безындексные обозначения теории разностных схем:

$$\begin{aligned} y &= y^n, & \hat{y} &= y^{n+1}, & \check{y} &= y^{n-1}, \\ y_i &= \frac{y - \check{y}}{\tau}, & y_t &= \frac{\hat{y} - y}{\tau}. \end{aligned}$$

Сформулируем обратную задачу идентификации правой части параболического уравнения после частичной дискретизации. Для основных величин сохраним те же обозначения, что и для непрерывного случая. Для простоты рассмотрения ограничимся чисто неявной аппроксимацией по времени, когда правая часть определяется (ср. с (6.48)) из дифференциально-разностного соотношения

$$f^n = \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + \mathcal{A}u^n, \quad n = 1, 2, \dots, N_0. \quad (6.61)$$

Входные данные (решение прямой задачи  $u^n$ ) заданы с погрешностью. Будем считать, что уровень погрешностей определяется постоянной  $\delta$ , причем

$$\|u_\delta^n - u^n\| \leq \delta, \quad n = 1, 2, \dots, N_0. \quad (6.62)$$

Приближенное решение задачи (6.61), (6.62) на момент времени  $t = t_n$  обозначим  $f_\alpha^n$ . Рассмотрим вопрос о восстановлении функции  $f_\alpha^n$  по заданным  $u_\delta^n, u_\delta^{n-1}, f_\alpha^{n-1}$ . Будем считать, что приближенной правой части  $f_\alpha^n$  соответствует решение краевой задачи

$$\frac{w^n - w^{n-1}}{\tau} + \mathcal{A}w^n = f_\alpha^n, \quad n = 1, 2, \dots, N_0, \quad (6.63)$$

$$w^0 = 0. \quad (6.64)$$

Сначала определяется  $f_\alpha^n$  как решение задачи

$$J_\alpha^n(f_\alpha^n) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha^n(v), \quad (6.65)$$

где  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$  и

$$J_\alpha^n(v) = \|u_\delta - w(v)\|^2 + \alpha \|v\|^2. \quad (6.66)$$

Здесь с учетом (6.63), (6.64)  $w(v)$  есть решение сеточной задачи

$$\frac{w - \check{w}}{\tau} + \mathcal{A}w = v. \quad (6.67)$$

Это позволяет записать (6.66) в виде

$$J_{\alpha}^n(v) = \left\| u_{\delta} - \frac{1}{\tau} \mathcal{G}_{\tau} \check{w} - \mathcal{G}_{\tau} v \right\|^2 + \alpha \|v\|^2,$$

где

$$\mathcal{G}_{\tau} = \mathcal{G}_{\tau}^* = \left( \frac{1}{\tau} E + \mathcal{A} \right)^{-1}.$$

Тем самым приближенное решение на каждый момент времени  $t = t_n$  определяется из уравнения

$$\mathcal{G}_{\tau}^* \mathcal{G}_{\tau} f_{\alpha} + \alpha f_{\alpha} = \mathcal{G}_{\tau}^* u_{\delta} - \frac{1}{\tau} \mathcal{G}_{\tau}^* \mathcal{G}_{\tau} \check{w}. \quad (6.68)$$

С учетом (6.67) и введенных обозначений получим задачу

$$\mathcal{G}_{\tau}^{-1} w = f_{\alpha} + \frac{1}{\tau} \check{w} \quad (6.69)$$

для определения  $w_n$ .

#### 6.2.4. Итерационное решение задачи идентификации

При решении обратных задач математической физики наибольшего внимания заслуживают итерационные методы, которые наиболее четко реализуют идею нахождения решения обратной задачи через последовательное решение набора прямых задач. При приближенном решении задачи (6.46)–(6.49) итерационными методами остановимся на случае глобальной регуляризации в варианте (6.58)–(6.60).

После симметризации уравнения (6.58) двухслойный итерационный метод запишем в виде

$$\frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_{k+1}} + \mathcal{G}^* \mathcal{G} f_k = \mathcal{G}^* u_{\delta}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.70)$$

Итерационные параметры при использовании метода скорейшего спуска рассчитываются по формуле

$$\tau_{k+1} = \left( \frac{\|r_k\|^*}{\|\mathcal{G} r_k\|^*} \right)^2, \quad r_k = \mathcal{G}^* \mathcal{G} f_k - \mathcal{G}^* u_{\delta}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.71)$$

Число итераций в (6.70), (6.71) согласуется с погрешностью  $\delta$  (см. (6.52)).



Реализация такого подхода связана с возможностью вычисления значений оператора  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^*$ . Напомним, что  $v = \mathcal{G}f_k$  есть решение прямой задачи

$$\frac{dv}{dt} + Av = f_k, \quad 0 < t \leq T, \quad (6.72)$$

$$v(0) = 0. \quad (6.73)$$

При нахождении значений сопряженного оператора  $w = \mathcal{G}^*v$  решается прямая задача

$$-\frac{dw}{dt} + Aw = v, \quad 0 \leq t < T, \quad (6.74)$$

$$w(T) = 0. \quad (6.75)$$

Тем самым, при заданном итерационном параметре переход на новую итерацию в соответствии с (6.70) связан с решением двух прямых задач (6.72), (6.73) и (6.74), (6.75).

Отметим некоторые основные особенности вычислительной реализации рассматриваемого итерационного метода, которые связаны, прежде всего, с дискретизацией по времени. Сохраним за сеточными функциями те же обозначения, что и для функций непрерывного аргумента.

Будем использовать равномерную сетку  $\bar{\omega}$  с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$ :

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\},$$

где  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Во внутренних узлах дифференциальный оператор  $\mathcal{A}$  аппроксимируем со вторым порядком разностным оператором

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega, \quad (6.76)$$

где, например,  $a(x) = k(x - 0,5h)$ .

В сеточном гильбертовом пространстве  $L_2(\omega)$  норму введем соотношением  $\|y\| = (y, y)^{1/2}$ , где

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h.$$

Напомним, что на множестве функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , для самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  при ограничениях  $k(x) \geq \kappa > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  верна оценка

$$A = A^* \geq \kappa\lambda_0 E, \quad (6.77)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}.$$

Прямой задаче (6.72), (6.73) поставим в соответствие симметричную разностную задачу

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} + \frac{1}{2}A(v^{n+1} + v^n) = \frac{1}{2}(f_k^{n+1} + f_k^n), \quad n = 1, 2, \dots, N_0, \quad (6.78)$$

$$v^0 = 0, \quad x \in \omega. \quad (6.79)$$

В этом случае погрешность аппроксимации имеет второй порядок как по времени, так и по пространству. Аналогично рассматриваются и другие двухслойные разностные схемы. Задаче (6.78), (6.79) в операторной записи придадим форму  $v = Gf_k$ , которая определяет оператор  $G$ .

Для двумерных сеточных функций определим гильбертово пространство  $H = L_2(Q_T)$ , в которой скалярное произведение и норма определены следующим образом:

$$(v, w)^* = \sum_{n=1}^{N_0-1} (v^n, w^n)\tau + \frac{\tau}{2}(v^0, w^0) + \frac{\tau}{2}(v^{N_0}, w^{N_0}), \quad \|v\|^* = \sqrt{(v, v)^*}.$$

Сопряженной в  $H$  к задаче (6.78), (6.79) будет сеточная задача (см. (6.74), (6.75))

$$-\frac{w^n - w^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{2}A(w^n + w^{n-1}) = \frac{1}{2}(v^n + v^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N_0, \quad (6.80)$$

$$w^{N_0} = 0, \quad x \in \omega. \quad (6.81)$$

В этом можно убедиться, если домножить скалярно уравнение (6.78) на  $w^n$ . Задаче (6.80), (6.81) соответствует компактная запись  $w = G^*v$ .

В соответствии с (6.70) итерационный метод записывается в виде

$$\frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_{k+1}} + G^*Gf_k = G^*u_\delta, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.82)$$

На первом этапе проводится расчет правой части  $G^*u_\delta$  — с этой целью решается краевая задача типа (6.80), (6.81). Вычисление невязки  $r_k = G^*Gf_k - G^*u_\delta$  требует на каждом шаге решения двух краевых задач ((6.78), (6.79) и (6.80), (6.81)). Расчет итерационных параметров проводится (см. (6.71)) по формуле

$$\tau_{k+1} = \left( \frac{\|r_k\|^*}{\|Gr_k\|^*} \right)^2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.83)$$

Определение  $Gr_k$  связано с решением дополнительной задачи типа (6.78), (6.79).

В качестве параметра регуляризации выступает число итераций  $K(\delta)$  в (6.82). Критерием выхода из итерационного процесса является

$$\|Gf_{K(\delta)} - u_\delta\|^* \leq \delta. \quad (6.84)$$

Отметим, что рассматриваемый алгоритм используется при определенных ограничениях на правую часть. В соответствии с применяемой симметризацией за счет оператора  $G$  на правую часть накладываются ограничения

$$f_\alpha^{N_0} = 0, \quad x \in \omega, \\ f_\alpha^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad x \in \partial\omega.$$

Описанный алгоритм (6.78)–(6.84) реализован в программе PROBLEM6. Ниже приведен полный текст этой программы.

### Программа PROBLEM6

```

C
C  PROBLEM6 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C              НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  PARAMETER ( DELTA = 0.05D0, N = 101, M = 101 )
  DIMENSION X(N), Y(N,M), YD(N,M), F(N,M), FA(N,M),
+           V(N,M), W(N,M), GU(N,M), RK(N,M), YY(N),
+           A(N), B(N), C(N), D(N), E(N), FF(N)
C
C  ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C  XL, XR      - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C  N           - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C  TMAX        - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C  M           - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C  DELTA       - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C  Y(N,M)      - ТОЧНОЕ РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ;
C  YD(N,M)     - ВОЗМУЩЕННОЕ РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ;
C  F(N,M)      - ТОЧНАЯ ПРАВая ЧАСТЬ;
C  FA(N,M)     - РАССЧИТАННАЯ ПРАВая ЧАСТЬ;
C
  XL = 0.D0
  XR = 1.D0
  TMAX = 1.D0
C
  OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C  СЕТКА
C
  H = (XR - XL) / (N - 1)
  DO I = 1, N
    X(I) = XL + (I-1)*H
  END DO

```

```

    TAU = TMAX / (M-1)
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
    T = 0.DO
    DO I = 1, N
        Y(I,1) = 0.DO
        YD(I,1) = 0.DO
    END DO
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
    DO K = 2, M
        T = T + TAU
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
    DO I = 2, N-1
        X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
        X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
        A(I) = AK(X1) / (2*N*N)
        B(I) = AK(X2) / (2*N*N)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        FF(I) = A(I) * Y(I-1,K-1)
+           + (1.DO / TAU - A(I) - B(I)) * Y(I,K-1)
+           + B(I) * Y(I+1,K-1)
+           + (AF(X(I),T) + AF(X(I),T-TAU)) / 2
    END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
    B(1) = 0.DO
    C(1) = 1.DO
    FF(1) = 0.DO
    A(N) = 0.DO
    C(N) = 1.DO
    FF(N) = 0.DO
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
    ITASK = 1
    CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
    DO I = 1, N
        Y(I,K) = YY(I)
    END DO
    END DO
C
C   ЗАШУМЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
C
    DO K = 2, M
        YD(1,K) = 0.DO

```

```

      YD(N,K) = 0.DO
      DO I = 2, N-1
        YD(I,K) = Y(I,K)
      +   + 2.DO*DELTA*(RAND(0)-0.5DO) / DSQRT(TMAX*(XR-XL))
      END DO
    END DO

C
C   СИММЕТРИЗАЦИЯ (РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ)
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = TMAX
      DO I = 1, N
        GU(I,M) = 0.DO
      END DO

C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = M-1, 1, -1
        T = T - TAU

C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N
        X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
        X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
        A(I) = AK(X1) / (2*N*H)
        B(I) = AK(X2) / (2*N*H)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
      +   FF(I) = A(I) * GU(I-1,K+1)
      +   + (1.DO / TAU - A(I) - B(I)) * GU(I,K+1)
      +   + B(I) * GU(I+1,K+1)
      +   + (YD(I,K) + YD(I,K+1)) / 2
      END DO

C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      FF(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      FF(N) = 0.DO

C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO I = 1, N
        GU(I,K) = YY(I)
      END DO
    END DO

C

```

```

C      ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C
      IT = 0
      ITMAX = 1000
C
C      НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
      DO K = 1, M
        DO I = 1, N
          FA(I,K) = 0.DO
        END DO
      END DO
100  IT = IT+1
C
C      РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАДАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N
        V(I,1) = 0.DO
      END DO
C
C      НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 2, M
        T = T + TAU
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N
        X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
        X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
        A(I) = AK(X1) / (2*N*N)
        B(I) = AK(X2) / (2*N*N)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        FF(I) = A(I) * V(I-1,K-1)
+         + (1.DO / TAU - A(I) - B(I)) * V(I,K-1)
+         + B(I) * V(I+1,K-1)
+         + (FA(I,K) + FA(I,K-1)) / 2
      END DO
C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      FF(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      FF(N) = 0.DO
C
C      РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C

```

```

      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO I = 1, N
        V(I,K) = YY(I)
      END DO
END DO

C
C  РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ
C
C  НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = TMAX
      DO I = 1, N
        W(I,M) = 0.DO
      END DO

C
C  НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = M-1, 1, -1
        T = T - TAU

C
C  КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N
        X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
        X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
        A(I) = AK(X1) / (2*N*N)
        B(I) = AK(X2) / (2*N*N)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        FF(I) = A(I) * W(I-1,K+1)
+         + (1.DO / TAU - A(I) - B(I)) * W(I,K+1)
+         + B(I) * W(I+1,K+1)
+         + (V(I,K) + V(I,K+1)) / 2
      END DO

C
C  ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      FF(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      FF(N) = 0.DO

C
C  РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO I = 1, N
        W(I,K) = YY(I)
      END DO
END DO

C

```

```

C      НЕВЯЗКА
C
      DO K = 1, M
        DO I = 1, N
          RK(I,K) = W(I,K) - GU(I,K)
        END DO
      END DO

C
C      ИТЕРАЦИОННЫЙ ПАРАМЕТР
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N
        W(I,1) = 0.DO
      END DO

C
C      НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 2, M
        T = T + TAU

C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N
        X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
        X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
        A(I) = AK(X1) / (2*N*H)
        B(I) = AK(X2) / (2*N*H)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        FF(I) = A(I) * W(I-1,K-1)
+      + (1.DO / TAU - A(I) - B(I)) * W(I,K-1)
+      + B(I) * W(I+1,K-1)
+      + (RK(I,K) + RK(I,K-1)) / 2
      END DO

C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      FF(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      FF(N) = 0.DO

C
C      РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO I = 1, N
        W(I,K) = YY(I)
      END DO
    END DO

```



```

C
C      МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА
C
SUM1 = 0.DO
SUM2 = 0.DO
DO K = 1, M
  DO I = 1, N
    SUM1 = SUM1 + RK(I,K)*RK(I,K)
    SUM2 = SUM2 + W(I,K)*W(I,K)
  END DO
END DO
TAUK = SUM1/SUM2

C
C      НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
DO K = 1, M
  DO I = 1, N
    FA(I,K) = FA(I,K) - TAUK *RK(I,K)
  END DO
END DO

C
C      ВЫХОД ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ЦИКЛА
C
SUM = 0.DO
DO K = 1, M
  DO I = 1, N
    SUM = SUM + (V(I,K) - YD(I,K))**2
  END DO
END DO
SL2 = DSQRT(SUM*TAU*H)
WRITE ( 01,* ) IT, TAUK, SL2
IF (SL2.GT.DELTA .AND. IT.LT.ITMAX) GO TO 100

C
C      ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ
C
SUM = 0.DO
DO K = 1, M
  T = (K-1)*TAU
  DO I = 1, N
    F(I,K) = AF(X(I),T)
    SUM = SUM + (FA(I,K) - F(I,K))**2
  END DO
END DO
STL2 = DSQRT(SUM*TAU*H)
WRITE ( 01,* ) ((FA(I,K), I = 1,N), K = 1,M)
WRITE ( 01,* ) ((F(I,K), I = 1,N), K = 1,M)
WRITE ( 01,* ) STL2
CLOSE ( 01 )
STOP END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AK ( X )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

```

```

C
C      КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ
C
C      AK = 1.DO
C
C      RETURN END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AF ( X, T )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ
C
C      AF = 10.*T*(1.DO - T)*X*(1.DO-X)
C
C      RETURN
C      END

```

Коэффициент уравнения, зависящий от пространственной переменной, и правая часть задаются в подпрограммах-функциях AK, AF.

### 6.2.5. Результаты расчетов

Расчеты выполнялись на равномерной сетке с числом узлов  $N = 100$ ,  $N_0 = 100$ , когда расчетная область представляет собой единичный квадрат ( $l = 1$ ,  $T = 1$ ). Обратная задача решалась в рамках квазиреального эксперимента при

$$k(x) = 1, \quad f(x, t) = 10t(1 - t)x(1 - x).$$

Решение задачи при уровне погрешностей  $\delta = 0,001$  показано на рис. 6.5 (число итераций равно 3). Изображены линии уровня с шагом  $\Delta = 0,1$  точного (штриховые линии) и приближенного решений. Влияние погрешности на точность восстановления правой части иллюстрируется рис. 6.6, 6.7, где представлены результаты решения с большими и меньшими погрешностями во входных данных. Для решения задачи с  $\delta = 0,0001$  потребовалось сделать 23 итерации.

Естественно, что точность идентификации существенно зависит от точного решения. В частности, мы отмечали выше необходимость сужения класса искомым правых частей в связи с выполнением однородных условий на частях границы расчетной области. На рис. 6.8 показаны результаты решения задачи с правой частью

$$f(x, t) = 2x(1 - x)$$

при  $\delta = 0,001$ .

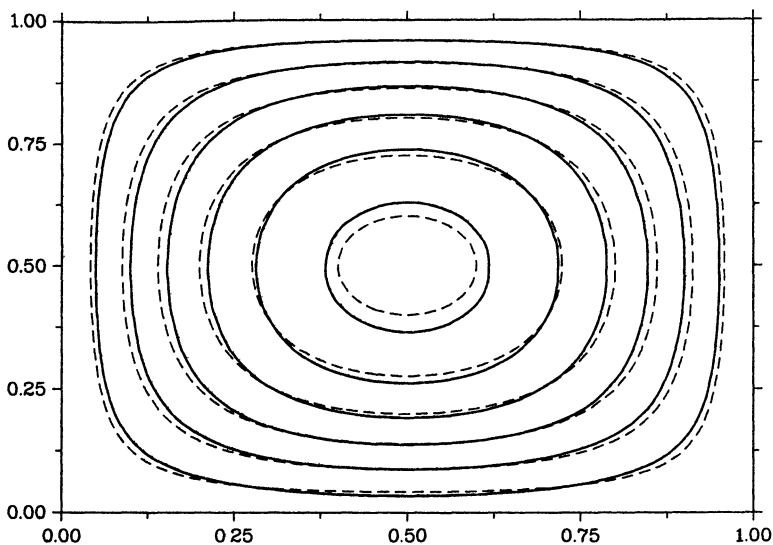


Рис. 6.5. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,001$

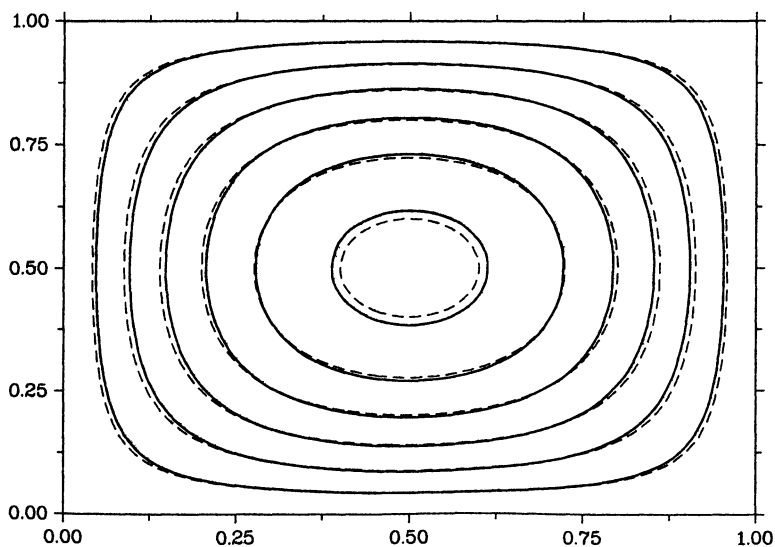


Рис. 6.6. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,0001$

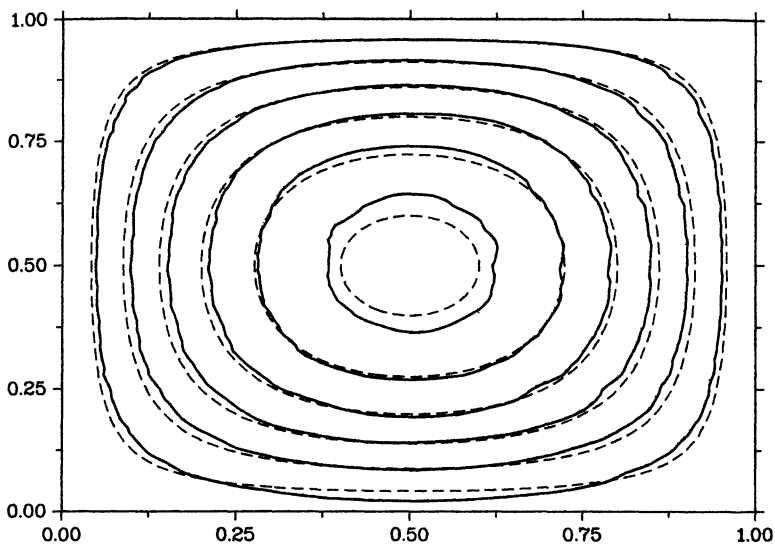


Рис. 6.7. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,01$

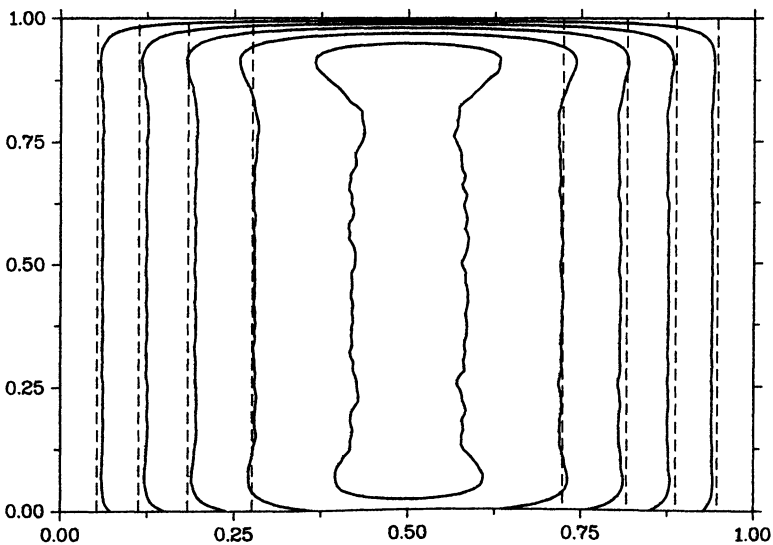


Рис. 6.8. Решение задачи идентификации при  $\delta = 0,001$

### 6.3. Восстановление зависимости правой части от времени

В теории обратных задач теплообмена рассматриваются и задачи по восстановлению неизвестных источников тепла по дополнительным измерениям температуры в отдельных точках. Аналогично формулируются и некоторые важные прикладные проблемы гидрогеологии. Для единственности решения необходимо сузить класс допустимых правых частей параболических уравнений. Во многих случаях естественно считать, что неизвестной является зависимость правой части от времени.

#### 6.3.1. Обратная задача

В данной части работы строится вычислительный алгоритм приближенного решения простейшей одномерной по пространству обратной задачи по восстановлению зависимости правой части параболического уравнения от времени при известном распределении по пространству. Такая линейная обратная задача относится к классу корректных в классическом смысле задач математической физики при специальных предположениях о точках дополнительных измерений — при условии действия источника в точках наблюдения.

Будем считать, что состояние системы описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (6.85)$$

с достаточно гладким положительным коэффициентом  $k(x)$ . Ограничимся рассмотрением задачи с простейшими однородными граничными условиями первого рода:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.86)$$

Задано также начальное условие:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (6.87)$$

В виде (6.85)–(6.87) формулируется прямая задача.

Нами рассматривается обратная задача, в которой неизвестной помимо  $u(x, t)$  является и правая часть  $f(x, t)$  уравнения (6.85). Будем считать, что функция  $f(x, t)$  представляется в виде

$$f(x, t) = \eta(t)\psi(x), \quad (6.88)$$

где функция  $\psi(x)$  задана, а неизвестной является зависимость источника от времени — функция  $\eta(t)$ . Эта зависимость восстанавливается по дополнительному наблюдению за  $u(x, t)$  в некоторой внутренней точке  $0 < x^* < l$ :

$$u(x^*, t) = \varphi(t). \quad (6.89)$$

Приходим к простейшей задаче идентификации правой части параболического уравнения (6.85)–(6.89).

### 6.3.2. Краевая задача для нагруженного уравнения

Решение задачи идентификации рассматривается при следующих ограничениях:

1.  $\psi(x^*) \neq 0$ ,
2.  $\psi(x)$  — достаточно гладкая функция ( $\psi \in C^2[0, 1]$ ),
3.  $\psi(x) = 0$  на границе расчетной области.

Особого внимания заслуживает первое предположение, которое связано с тем, что в точке наблюдения  $x^*$  действует восстанавливаемый источник. Именно это обуславливает корректность рассматриваемой задачи идентификации — непрерывную зависимость решения от начальных данных, правой части и измерений во внутренней точке.

Последнее из сформулированных предположений не носит принципиального характера, а формулируется для простоты изложения.

Будем искать решение обратной задачи в виде

$$u(x, t) = \theta(t)\psi(x) + w(x, t), \quad (6.90)$$

где

$$\theta(t) = \int_0^t \eta(s) ds. \quad (6.91)$$

Подстановка (6.88), (6.90), (6.91) в (6.85), дает следующее уравнение для  $w(x, t)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \theta(t) \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (6.92)$$

С учетом представления (6.90) условие (6.89) приводит к следующему представлению для неизвестной  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) = \frac{1}{\psi(x^*)} (\varphi(t) - w(x^*, t)). \quad (6.93)$$

Подстановка (6.93) в (6.92) дает искомое нагруженное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{\psi(x^*)} (\varphi(t) - w(x^*, t)) \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (6.94)$$

Граничное условие с учетом наших предположений о правой части на границе области имеет вид

$$w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.95)$$

Как следует из (6.91); для вспомогательной функции  $\theta(t)$  имеем

$$\theta(0) = 0. \quad (6.96)$$

Это позволяет использовать начальное условие

$$w(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (6.97)$$

Тем самым обратная задача (6.85)–(6.89) формулируется как краевая задача для нагруженного уравнения (6.94)–(6.97) с представлением (6.91), (6.93) для неизвестной зависимости источника от времени.

### 6.3.3. Разностная схема

Отметим некоторые основные моменты численного решения задачи идентификации. Вычислительный алгоритм базируется на приближенном решении краевой задачи для нагруженного уравнения. Численные методы решения таких неклассических краевых задач математической физики разработаны в настоящее время недостаточно.

Будем считать, что по переменной  $x$  введена равномерная сетка  $\bar{w}$  с шагом  $h$ . Через  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $Nh = 1$  обозначим узлы сетки и пусть  $v = v_i = v(x_i)$ . Для простоты будем считать, что точка наблюдения  $x = x^*$  совпадает с внутренним узлом отвечающим номеру  $i = k$ .

При переходе с одного временного слоя  $t_n = n\tau$  ( $n = 0, 1, \dots, N_0$ ,  $N_0\tau = T$ ,  $\tau > 0$ ) на другой временной слой  $t_{n+1}$  будем использовать чисто неявную разностную схему для уравнения (6.94). Во внутренних узлах сетки по пространству имеем

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} = (aw_{\bar{x}}^{n+1})_x + \frac{1}{\psi_k} (\varphi^{n+1} - w_k^{n+1}) (\alpha\psi_{\bar{x}})_x. \quad (6.98)$$

Для задач с достаточно гладким коэффициентом  $k(x)$  положим, например,  $a_i = k \cdot 0,5(x_i + x_{i-1})$ . Аппроксимируя (6.95), (6.97), получим

$$w_0^{n+1} = 0, \quad w_N^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (6.99)$$

$$w_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6.100)$$

Из решения разностной задачи (6.98)–(6.100) в соответствии с (6.93) определим

$$\theta^{n+1} = \frac{1}{\psi_k} (\varphi^{n+1} - w_k^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (6.101)$$

дополнив эти соотношения условием (см. (6.96))  $\theta^0 = 0$ . Принимая во внимание (6.91), для искомой зависимости правой части от времени

будем использовать простейшую процедуру численного дифференцирования:

$$\eta^{n+1} = \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau}, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (6.102)$$

Есть необходимость отдельно остановиться на вопросе решения сеточной задачи для реализации рассматриваемой неявной схемы.

### 6.3.4. Сеточная нелокальная задача и программная реализация

Никаких особых проблем с вычислительной реализацией схемы (6.98)–(6.100), несмотря на нестандартность (нелокальность) сеточной задачи на новом временном слое, не возникает. Запишем уравнение (6.98) во внутренних узлах в виде

$$\frac{w_i^{n+1}}{\tau} - (aw_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + \frac{1}{\psi_k} (a\psi_{\bar{x}})_{x,i} w_k^{n+1} = g_i^n \quad (6.103)$$

с заданной правой частью  $g_i^n$  и граничными условиями (6.99). Решение системы (6.99), (6.103) ищется в виде

$$w_i^{n+1} = y_i + w_k^{n+1} z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6.104)$$

Подстановка (6.104) в (6.103) позволяет сформулировать следующие сеточные задачи для вспомогательных функций  $y_i, z_i$ :

$$\frac{y_i}{\tau} - (ay_{\bar{x}})_{x,i} = g_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (6.105)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad (6.106)$$

$$\frac{z_i}{\tau} - (az_{\bar{x}})_{x,i} + \frac{1}{\psi_k} (a\psi_{\bar{x}})_{x,i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (6.107)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0. \quad (6.108)$$

После этого с учетом представления (6.104) находится  $w_k^{n+1}$ :

$$w_k^{n+1} = \frac{y_k}{1 - z_k}. \quad (6.109)$$

Корректность алгоритма обеспечивается необращением знаменателя (6.109) в нуль. Для сеточной задачи (6.107), (6.108) на основе принципа максимума для разностных схем устанавливается априорная оценка

$$\max_{0 \leq i \leq N} |z_i| \leq \tau \max_{0 < i < N} \left| \frac{1}{\psi_k} (a\psi_{\bar{x}})_{x,i} \right|.$$

Поэтому  $|z_i| < 1$  при достаточно малых  $\tau = O(1)$ , т. е. необходимо использовать малые шаги по времени.



Сеточные задачи (6.105), (6.106) и (6.107), (6.108) являются стандартными и их численное решение не представляет проблем. В рассматриваемом нами одномерном случае мы можем воспользоваться привычным алгоритмом трехточечной прогонки.

Вычислительная сложность используемого вычислительного алгоритма фактически эквивалентна двукратному решению прямой задачи. В силу этого можно отнести данный метод к классу оптимальных. Приведем текст программы, которая используется для численного решения рассматриваемой обратной задачи.

### Программа PROBLEM7

```

C
C   PROBLEM7 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C             НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C             НЕИЗВЕСТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВРЕМЕНИ
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C   PARAMETER ( DELTA = 0.0005D0, N = 101, M = 101 )
C   DIMENSION VT(M), VY(M), VP(M), VV(M),
C +       A(N), B(N), C(N), F(N), Y(N), VB(N), FB(N), W(N), Z(N)
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR   - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   XD       - ТОЧКА НАБЛЮДЕНИЯ;
C   N        - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TMAX     - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C   M        - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   VY(M)    - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ;
C   VP(M)    - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ;
C   VT(M)    - ТОЧНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОТ ВРЕМЕНИ;
C   VB(N))   - ЗАВИСИМОСТЬ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОТ ПРОСТРАНСТВА;
C   VV(M)    - РАССЧИТАННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОТ ВРЕМЕНИ;;
C
C   XL = 0.D0
C   XR = 1.D0
C   XD = 0.3D0
C   TMAX = 1.D0
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H = (XR - XL) / (N - 1)
C   TAU = TMAX / (M-1)
C   ND = 1 + (XD + 0.5D0*H) / H
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

```

```
C
C      ИСТОЧНИК
C
DO K = 1, M
  T = (K-0.5DO)* TAU
  VT(K) = (K-0.5DO)* TAU
  IF (T.GE.0.6DO) VT(K) = 0.DO
END DO

C
C      ЗАВИСИМОСТЬ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОТ ПРОСТРАНСТВА
C
DO I = 1, N
  VB(I) = DSIN(3.1415926*(I-1)*H)
END DO

C
C      РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
T = 0.DO
DO I = 1, N
  Y(I) = 0.DO
END DO
VY(1) = Y(ND)

C
C      НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
DO K = 2, M
  T = T + TAU

C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
DO I = 2, N-1
  A(I) = 1.DO / (H*H)
  B(I) = 1.DO / (H*H)
  C(I) = 2.DO / (H*H) + 1.DO / TAU
END DO

C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
B(1) = 0.DO
C(1) = 1.DO
F(1) = 0.DO
A(N) = 0.DO
C(N) = 1.DO
F(N) = 0.DO

C
C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ СЕТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ
C
DO I = 2, N-1
  F(I) = VB(I)*VT(K) + Y(I) / TAU
END DO

C
```

```

C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Y, ITASK )
      VY(K) = Y(ND)
      END DO
C
C   ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
      DO K = 1, M
          VP(K) = VY(K) + 2.DO*DELTA*(RAND(0)-0.5DO)
      END DO
C
C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C   ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ
C
      DO I = 2, N-1
          FB(I) = (1.DO / VB(ND))
+          * (VB(I+1)-2.DO*VB(I) + VB(I-1)) / (H*H)
      END DO
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N
          Y(I) = 0.DO
      END DO
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 2, M
          T = T + TAU
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N-1
          A(I) = 1.DO / (H*H)
          B(I) = 1.DO / (H*H)
          C(I) = 2.DO / (H*H) + 1.DO / TAU
      END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      F(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      F(N) = 0.DO
C

```

```

C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ СЕТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ
C
      DO I = 2, N-1
          F(I) = FB(I)*VY(K) + Y(I) / TAU
      END DO

C
C      РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ПОДЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, W, ITASK )

C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N-1
          A(I) = 1.DO / (H*H)
          B(I) = 1.DO / (H*H)
          C(I) = 2.DO / (H*H) + 1.DO / TAU
      END DO

C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      F(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      F(N) = 0.DO

C
C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ СЕТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ
C
      DO I = 2, N-1
          F(I) = - FB(I)
      END DO

C
C      РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ПОДЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Z, ITASK )

C
      VV(K) = (VP(K)-VP(K-1)
+           - (W(ND) / (1 - Z(ND)) - Y(ND)) ) / (TAU * VB(ND))
      DO I = 1, N
          Y(I) = W(I) + Z(I) * W(ND) / (1 - Z(ND))
      END DO
      END DO

C
C      ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
C
      WRITE ( 01,* ) (VV(K), K = 2,M)
      WRITE ( 01,* ) (VT(K), K = 2,M)
      CLOSE ( 01 )
      STOP
      END

```

### 6.3.5. Примеры расчетов

Здесь представлены результаты расчетов, которые выполнены для простейшей модельной обратной задачи (6.84)–(6.89). В рамках концепции квазиреального эксперимента рассматривается прямая задача (6.84)–(6.87) с некоторой заданной правой частью. Для коэффициента уравнения и начального условия положим

$$k(x) = 1, \quad u_0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Правая часть задается соотношением (6.88), где

$$\psi(x) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 0,6, \\ 0, & 0,6 < t < T = 1. \end{cases}$$

Такая задача решается численно на сетке с  $N = 100$ ,  $N_0 = 100$ .

Ниже приведены результаты восстановления такой правой части по наблюдениям в точке  $x^* = 0,3$ . По результатам расчетов задается сеточная функция  $\varphi^n$ .

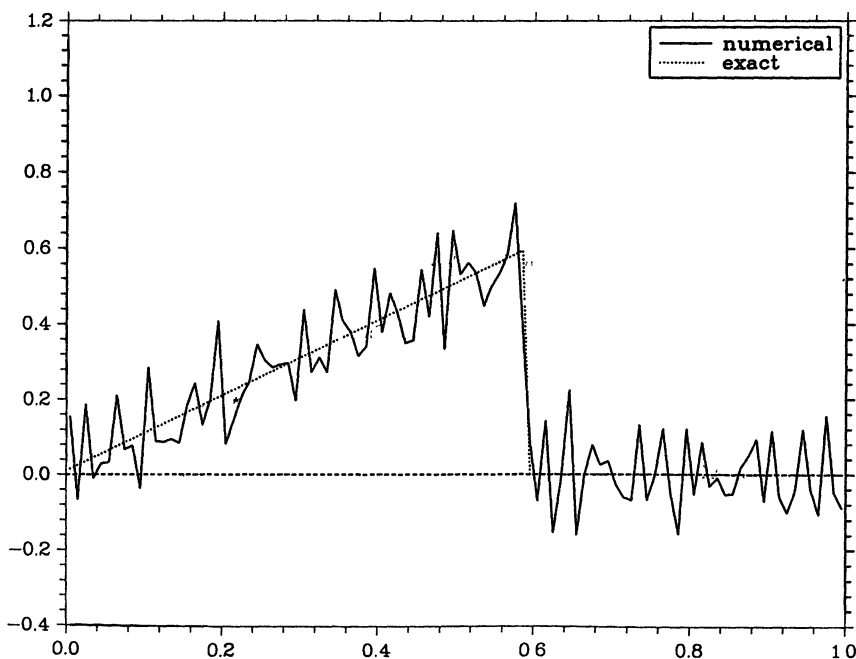


Рис. 6.9. Восстановление зависимости правой части от времени при  $\delta = 0,001$

При решении обратной задачи сеточная функция  $\varphi(t)$  зашумляется случайными погрешностями. Положим

$$\varphi_{\delta}^n = \varphi^n + 2\delta \left( \sigma^n - \frac{1}{2} \right),$$

где  $\sigma^n$  — случайная функция, нормально распределенная на интервале  $[0, 1]$ . Величина  $\delta$  задает уровень погрешности. На рис. 6.9 представлены точная и восстановленная зависимость правой части от времени по описанному выше алгоритму при уровне погрешности  $\delta = 0,001$ .

Иллюстрацией корректности рассматриваемой обратной задачи являются данные расчетов при различном уровне погрешностей. На рис. 6.10 дано решение задачи при  $\delta = 0,0025$ , а на рис. 6.11 — при  $\delta = 0,0005$ . При уменьшении уровня погрешности решение восстанавливается более точно.

Рассматриваемый вычислительный алгоритм решения обратной задачи может быть использован и при решении более общих задач. В частности, переход к многомерным задачам, задачам с многими точками наблюдения и т. д. носит редакционный характер. Принципиальные сложности

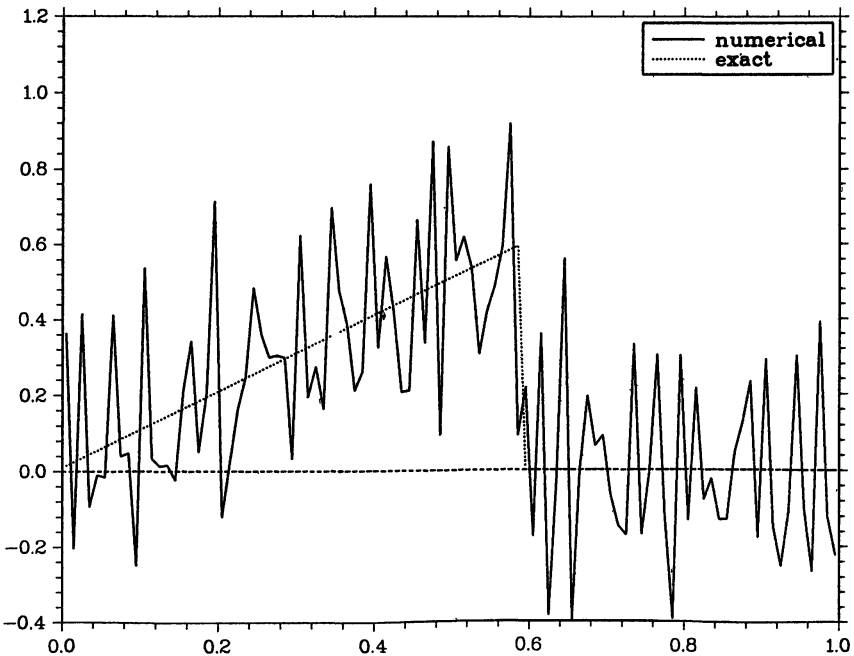


Рис. 6.10. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,0025$

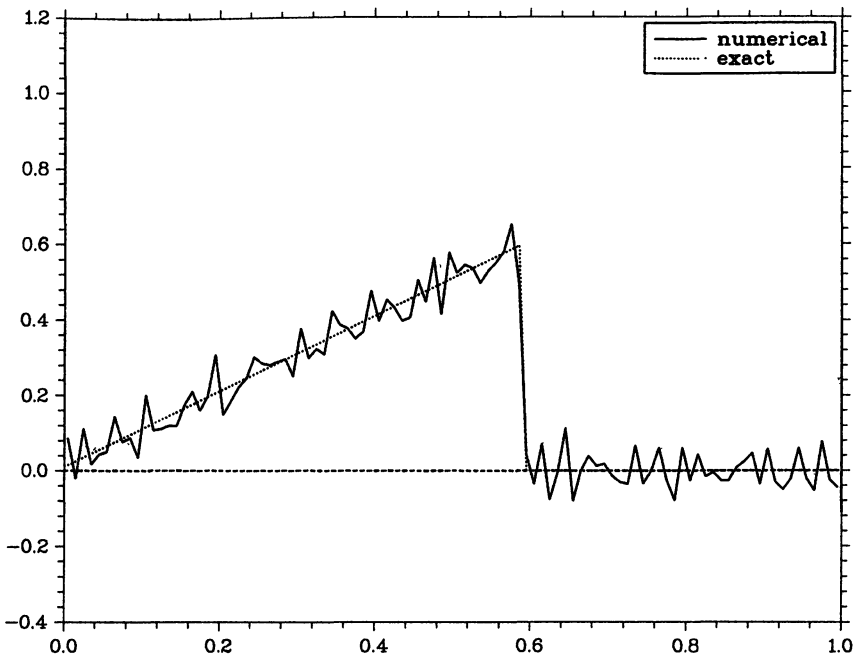


Рис. 6.11. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,0005$

(некорректность задачи) возникают при переходе к задаче с локализованными источниками, при отказе от предположения  $\psi(x^*) \neq 0$ .

## 6.4. Идентификация постоянной во времени правой части параболического уравнения

Рассматривается обратная задача по восстановлению правой части параболического уравнения, которая не зависит от времени. Дополнительные измерения проводятся на конечный момент времени.

### 6.4.1. Постановка задачи

Рассматривается процесс, описываемый одномерным параболическим уравнением второго порядка. Предполагается, что динамика определяется постоянным во времени, распределенным по пространству источ-

ником, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (6.110)$$

Дополним это уравнение однородными граничными условиями первого рода:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6.111)$$

Начальное состояние определяется условием

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (6.112)$$

При заданных коэффициенте  $k(x)$  и правой части  $f(x)$  (6.110)–(6.112) определяет прямую задачу.

Будем рассматривать обратную задачу, в которой неизвестной является правая часть  $f(x)$  уравнения (6.110). Будем считать, что функция  $f(x)$  восстанавливается по известному решению на конечный момент времени, т. е. представляется в виде

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (6.113)$$

Исследование этой задачи начнем с того, что получим априорную оценку для решения  $u(x, t)$ , выражающую его устойчивость по отношению к малым возмущениям  $\varphi(x)$ .

### 6.4.2. Оценка устойчивости

Наиболее простой подход к исследованию обратной задачи (6.110)–(6.113) связан с исключением неизвестной функции  $f(x)$ . С этой целью продифференцируем уравнение (6.110) по времени:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \quad (6.114)$$

Для этого уравнения по переменной  $t$  задаются два крайних условия (6.112) и (6.113).

Для рассматриваемой задачи (6.111)–(6.114) будем использовать операторную формулировку, которую можно применять при исследовании более общих задач. Введем гильбертово пространство  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  со скалярным произведением и нормой

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx, \quad \|v\|^2 = (v, v) = \int_{\Omega} v^2(x) dx, \quad \Omega = (0, l)$$

Для функций  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  из  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(Q_T)$  положим

$$(v, w)^* = \int_0^T (v, w) dt = \int_0^T \int_{\Omega} v(x, t)w(x, t) dx dt, \quad \|v\|^* = \sqrt{(v, v)^*}.$$



На множестве функций, удовлетворяющих условиям (6.111), определим оператор

$$\mathcal{A}u = -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right).$$

Среди основных свойств оператора  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  отметим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq mE, \quad m > 0.$$

С учетом введенных обозначений переформулируем (6.111)–(6.114) как краевую задачу

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \mathcal{A} \frac{du}{dt} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (6.115)$$

$$u(0) = 0, \quad u(T) = \varphi. \quad (6.116)$$

Перейдем от (6.115), (6.116) к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого представим решение в виде

$$u(t) = w(t) + \frac{t}{T} \varphi. \quad (6.117)$$

Для  $w(t)$  получим задачу

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \mathcal{A} \frac{dw}{dt} = -\psi, \quad 0 < t < T, \quad (6.118)$$

$$w(0) = 0, \quad w(T) = 0, \quad (6.119)$$

где

$$\psi = \frac{1}{T} \mathcal{A}\varphi.$$

Для получения простейшей априорной оценки для решения задачи (6.118), (6.119) домножим уравнение (6.118) скалярно в  $\mathcal{H}$  на  $w$ :

$$\left( \frac{d^2 w}{dt^2}, w \right)^* + \left( \mathcal{A} \frac{dw}{dt}, w \right)^* = -(\psi, w)^*. \quad (6.120)$$

Имеем с учетом постоянства оператора  $\mathcal{A}$  и однородных граничных условий (6.119)

$$\left( \mathcal{A} \frac{dw}{dt}, w \right)^* = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} (\mathcal{A}w, w) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}w, w) \Big|_0^T = 0.$$

Для первого слагаемого в (6.120) получим

$$\left( \frac{d^2 w}{dt^2}, w \right)^* = - \left( \frac{dw}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) = - \left( \int_0^T \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dt, 1 \right),$$

принимая во внимание (6.119). Подстановка в (6.120) дает

$$\left( \int_0^T \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dt, 1 \right) = (\psi, w)^*. \quad (6.121)$$

Для оценки левой части (6.121) привлекается неравенство Фридрикса

$$\int_0^T w^2 dt \leq \mathcal{M}_0 \int_0^T \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dt.$$

В силу этого

$$\left( \int_0^T \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 dt, 1 \right) \geq \mathcal{M}_0^{-1} (\|w\|^*)^2.$$

Для правой части (6.121) используется оценка

$$(\psi, w)^* \leq \|\psi\|^* \cdot \|w\|^*.$$

Это позволяет из (6.121) получить искомое неравенство

$$\|w\|^* \leq \mathcal{M}_0 \|\psi\|^*, \quad (6.122)$$

выражающее устойчивость решения задачи (6.118), (6.119) по правой части.

С учетом оценки (6.122) и представления (6.117) для решения задачи (6.115), (6.116) получим

$$\|u\|^* \leq \|\varphi\|^* + \frac{\mathcal{M}_0}{T} \|A\varphi\|^*. \quad (6.123)$$

Тем самым в обратной задаче (6.115), (6.116) есть непрерывная зависимость решения  $u(t)$  от условий при  $t = T$ .

После определения  $u(t)$  из решения корректной задачи (6.115), (6.116) искомая правая часть  $f$  дается формулой

$$f = \frac{du}{dt} + Au. \quad (6.124)$$

Полное исследование корректности обратной задачи по определению пары функций  $\{u, f\}$  подразумевает рассмотрение вопроса непрерывной зависимости от входных данных (от функции  $\varphi$ ) не только  $u$ , но и  $f$ . Мы ограничились получением простейшей оценки (6.123) только для  $u$ .

### 6.4.3. Разностная задача

Рассматриваемая обратная задача (6.110)–(6.113) сводится к неклассической краевой задаче (6.111)–(6.114). Имеет смысл рассмотреть особенности вычислительного алгоритма, обратив особое внимание на дискретизацию по времени. Для сеточных функций используются те же обозначения, что и для функций непрерывного аргумента.

Для дискретизации по пространству применяется равномерная сетка  $\bar{\omega}$  с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$ :

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\}$$

где, как обычно,  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов. В сеточном гильбертовом пространстве  $L_2(\omega)$  норму введем соотношением  $\|y\| = (y, y)^{1/2}$ , где

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h.$$

Во внутренних узлах дифференциальный оператор  $A$  аппроксимируем со вторым порядком разностным оператором

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega, \quad (6.125)$$

где, например,  $a(x) = k(x - 0,5h)$ .

На множестве функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$  (см. (6.111)), для самосопряженного оператора  $A$  при ограничениях  $k(x) \geq \kappa > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  верна оценка

$$A = A^* \geq \kappa\lambda_0 E \quad (6.126)$$

с постоянной

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}.$$

По времени используется равномерная сетка

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\}$$

и пусть  $y^n = y(t_n)$ .

Для аппроксимации уравнения (6.114) со вторым порядком по времени и пространству естественно использовать разностное уравнение

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + A \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = 0, \quad x \in \omega, \quad (6.127)$$

$$n = 1, 2, \dots, N_0 - 1.$$

Это уравнение дополняется граничными условиями (см. (6.112), (6.113))

$$u^0 = 0, \quad u^{N_0} = \varphi, \quad x \in \omega. \quad (6.128)$$

Исследование разностной задачи (6.127), (6.128) проводится аналогично дифференциальному случаю. Представим (см. (6.117)) разностное решение в виде

$$u^n = w^n + \frac{t_n}{T} \varphi, \quad n = 0, 1, \dots, N_0. \quad (6.129)$$

Аналогом (6.118), (6.119) будет задача

$$\frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\tau^2} + A \frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\tau} = -\psi, \quad x \in \omega, \quad (6.130)$$

$$n = 1, 2, \dots, N_0 - 1,$$

$$w^0 = 0, \quad w^{N_0} = 0, \quad x \in \omega, \quad (6.131)$$

в которой

$$\psi = \frac{1}{T} A \varphi.$$

Для двумерных сеточных функций определим гильбертово пространство, в которой скалярное произведение и норма есть

$$(v, w)^* = \sum_{n=1}^{N_0-1} (v^n, w^n) \tau, \quad \|v\|^* = \sqrt{(v, v)^*}$$

соответственно.

Домножая скалярно в  $H = L_2(Q_T)$  уравнение (6.130) на  $w$ , получим

$$(w_{it}, w)^* + (Aw_i, w)^* = -(\psi, w)^*. \quad (6.132)$$

Здесь использованы стандартные обозначения теории разностных схем

$$w_{\bar{i}} = \frac{w^n - w^{n-1}}{\tau}, \quad w_{\bar{t}} = \frac{w^{n+1} - w^n}{\tau},$$

$$w_{i\bar{t}} = \frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\tau^2}, \quad w_{\bar{t}} = \frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\tau}.$$

Дальнейшее рассмотрение базируется на непосредственно проверяемом свойстве кососимметричности оператора центральной разностной производной, так что

$$(Aw_{\bar{t}}, w)^* = 0.$$

Аналогично (6.121), из (6.132) получаем

$$\left( \sum_{n=1}^{N_0} (w_{\bar{i}})^2 \tau, 1 \right) = (\psi, w)^*. \quad (6.133)$$

Принимая во внимание разностное неравенство Фридрикса, получим

$$\sum_{n=1}^{N_0-1} w^2 \tau \leq M_0 \sum_{n=1}^{N_0} (w_{\bar{i}})^2 \tau,$$

где постоянная

$$M_0 = \frac{T^2}{8}.$$

С учетом неравенства

$$(\psi, w)^* \leq \|\psi\|^* \cdot \|w\|^*$$

из (6.133) получаем оценку

$$\|w\|^* \leq M_0 \|\psi\|^*. \quad (6.134)$$

Из (6.129) и (6.134) следует искомая оценка

$$\|u\|^* \leq \|\varphi\|^* + \frac{M_0}{T} \|A\varphi\|^*. \quad (6.135)$$

Оценка (6.135) полностью согласуется с априорной оценкой (6.123) для решения дифференциальной задачи.

Для нахождения правой части из решения задачи (6.127), (6.128) в полусеточных узлах используется выражение

$$f_{n+1/2} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \quad (6.136)$$

которое согласовано с разностной аппроксимацией (6.127) уравнения (6.114).

#### 6.4.4. Решение сеточной задачи

С привлечением полученной априорной оценки (6.135) при рассмотрении задачи для погрешности устанавливается сходимость разностного решения, полученного из (6.127), (6.128), к решению краевой задачи (6.111)–(6.114) со вторым порядком по времени и пространству. При вычислительной реализации рассматриваемого подхода возникают определенные проблемы с нахождением решения сеточной задачи (6.127), (6.128). Для задач с постоянным коэффициентом  $k(x)$  можно строить быстрые алгоритмы на основе метода разделения переменных. Для более общих задач (в частности, при  $k(x) \neq \text{const}$ ) необходимо ориентироваться на использование итерационных методов. На рис. 6.12 показан шаблон сеточной задачи (6.127), (6.128).

Рассмотрим один из возможных подходов к решению рассматриваемой сеточной задачи. С использованием представления (6.129) задача

сводится к нахождению сеточной функции  $w$  как решения (6.130), (6.131). Эту сеточную задачу запишем в виде

$$\bar{A}w = \psi, \quad \bar{A} = A_0 + A_1. \tag{6.137}$$

Операторы  $A_0$  и  $A_1$  определены согласно

$$A_0w^n = -\frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\tau^2}, \tag{6.138}$$

$$A_1w^n = -A\frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\tau}, \quad n = 1, 2, \dots, N_0 - 1, \tag{6.139}$$

на множестве сеточных функций, удовлетворяющих условиям (6.131).

Особенностью сеточной задачи (6.137) является то, что оператор задачи  $\bar{A}$  является несамосопряженным. Это существенно затрудняет построение эффективных итерационных методов. Как показано выше, оператор  $A_1$ , определяемый согласно (6.139), является кососимметричным  $(A_1w, w) = 0$ . Среди основных свойств оператора  $A_0$  (см. (6.138)) отметим

$$A_0 = A_0^* \geq M_0^{-1}E.$$

Тем самым, операторы  $A_0$  и  $A_1$  представляют собой самосопряженную и кососимметричную часть оператора  $\bar{A}$  соответственно:

$$A_0 = \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{A}^*), \quad A_1 = \frac{1}{2}(\bar{A} - \bar{A}^*).$$

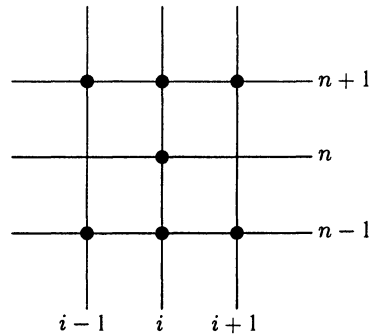


Рис. 6.12. Шаблон сеточной задачи

Среди общих подходов к решению сеточных задач с несамосопряженным оператором отметим класс методов с предварительной симметризацией — переходом от исходной задачи с несамосопряженным оператором к задаче с самосопряженным оператором. Примером служит симметризация Гаусса, когда вместо (6.137) решается уравнение

$$\bar{A}^* \bar{A}w = \bar{A}^* \psi. \tag{6.140}$$

Вторая активно эксплуатируемая в вычислительной практике идея при приближенном решении задач с несамосопряженным оператором (плохая задача) связана с выбором в качестве переобуславливателя итерационного метода самосопряженной части оператора задачи ( $B = A_0$ ) (хорошая задача на каждом итерационном шаге). При решении задачи (6.137) будем использовать итерационный метод, который базируется

на отмеченном переходе к задаче с самосопряженным оператором с выбором  $A_0$  в качестве переобуславливателя.

Первый этап преобразования связан с переобуславливанием исходной задачи:

$$A_0^{-1}(A_0 + A_1)w = A_0^{-1}\psi.$$

На втором этапе проводится симметризация оператором  $A_0 + A_1^*$ ,  $A_1^* = -A_1$  (ср. с (6.140)):

$$\begin{aligned} \tilde{A}w &= \tilde{f}, \\ \tilde{A} &= (A_0 + A_1^*)A_0^{-1}(A_0 + A_1), \quad \tilde{f} = (A_0 + A_1^*)A_0^{-1}\psi. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Для решения задачи (6.141) естественно использовать итерационный метод сопряженный градиентов, который при нашем выборе оператора переобуславливания ( $B = A_0$ ), принимает вид

$$\begin{aligned} A_0w_{k+1} &= \alpha_{k+1}(A_0 - \tau_{k+1}\tilde{A})w_k + (1 - \alpha_{k+1})A_0w_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}\tilde{f}, \\ k &= 1, 2, \dots, \\ A_0w_1 &= (A_0 - \tau_1\tilde{A})w_0 + \tau_1\tilde{f}. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Для итерационных параметров  $\alpha_{k+1}$  и  $\tau_{k+1}$  используются расчетные формулы

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= \frac{(\tilde{w}_k, r_k)}{(\tilde{A}\tilde{w}_k, \tilde{w}_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ \alpha_{k+1} &= \left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(\tilde{w}_k, r_k)}{(\tilde{w}_{k-1}, r_{k-1})} \frac{1}{\alpha_k}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha_1 = 1, \end{aligned} \quad (6.143)$$

где  $r_k = \tilde{A}w_k - \tilde{f}$  — невязка, а  $\tilde{w} = A_0^{-1}r_k$  — поправка.

Итерационный метод (6.142), (6.143) реализован в программе PROBLEMS.

### Программа PROBLEMS

```

C
C   PROBLEMS - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C               НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               (НЕИЗВЕСТНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C   PARAMETER ( DELTA = 0.DO, N = 51, M = 51 )
C   DIMENSION X(N), Y(N), FT(N), FY(N), PHI(N), PHID(N),
+             A(M), B(M), C(M), F(M),           ! M .GE. N
+             V(N,M), PSI(N), FP(N,M), FR(N,M), WORK(N,M),
+             W(N,M), WOLD(N,M), RK(N,M), ARK(N,M), FTILDE(N,M)

```

```

C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR   - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   N        - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TMAX     - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C   M        - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   PHI(N)   - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ;
C   PHID(N)  - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ;
C   FT(N)    - ТОЧНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОТ ПРОСТРАНСТВА;
C   FY(N)    - РАССЧИТАННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОТ ПРОСТРАНСТВА;
C   EPS      - ТРЕБУЕМАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО
C             ПРИБЛИЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ.
C
C   XL   = 0.DO
C   XR   = 1.DO
C   TMAX = 1.DO
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H   = (XR - XL) / (N - 1)
C   TAU = TMAX / (M-1)
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C   ТОЧНАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
C   DO I = 1, N
C     X(I) = (I-1) * H
C     FT(I) = AF(X(I))
C   END DO
C
C   РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
C   T = 0.DO
C   DO I = 1, N
C     Y(I) = 0.DO
C   END DO
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
C   DO K = 2, M
C     T = T + TAU
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
C   DO I = 2, N-1
C     X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2

```



```

      X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
      A(I) = AK(X1) / (2.DO*H*H)
      B(I) = AK(X2) / (2.DO*H*H)
      C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
      F(I) = A(I) * Y(I-1)
+       + (1.DO / TAU - A(I) - B(I)) * Y(I)
+       + B(I) * Y(I+1)
+       + AF(X(I))
      END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      F(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      F(N) = 0.DO
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Y, ITASK )
      END DO
C
C   РЕШЕНИЕ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ
C
      DO I = 1, N
        PHI(I) = Y(I)
      END DO
C
C   ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
      DO I = 2, N-1
        PHID(I) = PHI(I) + 2.DO*DELTA*(RAND(0)-0.5DO)
      END DO
      PHID(1) = 0.DO
      PHID(N) = 0.DO
C
C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
      EPS = 1.D-8
C
C   ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ
C
      DO I = 1, N
        DO K = 1, M
          V(I,K) = (K-1)*PHID(I) / (M-1)
          FP(I,K) = 0.DO
          FR(I,K) = 0.DO
          RK(I,K) = 0.DO
          ARK(I,K) = 0.DO
          WORK(I,K) = 0.DO
        
```

```

      FTILDE(I,K) = 0.DO
    END DO
  END DO
C
C   ПРАВАЯ ЧАСТЬ СИММЕТРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ
C
DO I = 2, N-1
  X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
  X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
  A(I) = AK(X1) / (H*H)
  B(I) = AK(X2) / (H*H)
  PSI(I) = - A(I)*PHID(I-1) + (A(I) + B(I))*PHID(I)
+         - B(I)*PHID(I+1)
  PSI(I) = PSI(I) / TMAX
END DO
DO I = 2, N-1
  DO K = 2, M-1
    FP(I,K) = PSI(I)
  END DO
END DO
CALL AOI ( N, M, TAU, FR, FP, A, B, C, F, Y )
DO I = 2, N-1
  DO K = 2, M-1
    X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
    X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
    AA = AK(X1) / (H*H)
    BB = AK(X2) / (H*H)
    WORK(I,K) = - AA*(FR(I-1,K+1) - FR(I-1,K-1))
+              + (AA + BB)*(FR(I,K+1) - FR(I,K-1))
+              - BB*(FR(I+1,K+1) - FR(I+1,K-1))
    WORK(I,K) = WORK(I,K) / (2.DO*TAU)
  END DO
END DO
DO I = 2, N-1
  DO K = 2, M-1
    FTILDE(I,K) = FP(I,K) + WORK(I,K)
  END DO
END DO
C
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ
C
NIT      = 0
NITMAX  = 5000
AL      = 1.DO
C
C   НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
DO I = 1, N
  DO K = 1, M
    W(I,K)   = 0.DO
    WOLD(I,K) = 0.DO
  END DO
END DO

```

```

C
C      ИТЕРАЦИОННЫЙ ЦИКЛ
C
100 NIT = NIT + 1
C
C      НЕВЯЗКА
C
      CALL ATILDE ( N, M, H, TAU, W, RK, WORK, A, B, C, F, Y )
      DO I = 2, N-1
        DO K = 2, M-1
          RK(I,K) = RK(I,K) - FTILDE(I,K)
        END DO
      END DO
C
C      ПОПРАВКА
C
      CALL AOI ( N, M, TAU, ARK, RK, A, B, C, F, Y )
C
C      ИТЕРАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ
C
      CALL ATILDE ( N, M, H, TAU, ARK, FR, WORK, A, B, C, F, Y )
      RR = 0.DO
      RA = 0.DO
      DO I = 2, N-1
        DO K = 2, M-1
          RR = RR + RK(I,K)*ARK(I,K)
          RA = RA + FR(I,K)*ARK(I,K)
        END DO
      END DO
      IF (NIT.EQ.1) RRO = RR
      TAUК = RR / RA
      IF (NIT.GT.1)
+ AL = 1.DO / (1.DO - TAUК * RR / (TAUKOLD * RROLD * ALOLD))
C
C      НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
      DO I = 2, N-1
        DO K = 2, M-1
          AA = AL * W(I,K) + (1.DO - AL) * WOLD(I,K)
+         - TAUК * AL * ARK(I,K)
          WOLD(I,K) = W(I,K)
          W(I,K) = AA
        END DO
      END DO
      RROLD = RR
      TAUКOLD = TAUК
      ALOLD = AL
C
C      ОКОНЧАНИЕ ИТЕРАЦИЙ
C
      IF (RR .GE. EPS*RRO .AND. NIT .LT. NITMAX) GO TO 100
C
C      ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

```

```

C
DO I = 1, N
  DO K = 1, M
    W(I,K) = W(I,K) + V(I,K)
  END DO
END DO
DO I = 2, N-1
  X1 = (X(I) + X(I-1)) / 2
  X2 = (X(I+1) + X(I)) / 2
  A(I) = AK(X1) / (2.DO*H*H)
  B(I) = AK(X2) / (2.DO*H*H)
  FY(I) = (W(I,2) - W(I,1)) / TAU
+       - A(I)*(W(I-1,2) + W(I-1,1))
+       + (A(I)+B(I))*(W(I,2) + W(I,1))
+       - B(I)*(W(I+1,2) + W(I+1,1))
END DO

C
WRITE ( 01,* ) NIT
WRITE ( 01,* ) (FT(I), I = 2,N-1)
WRITE ( 01,* ) (FY(I), I = 2,N-1)
WRITE ( 01,* ) (PHI(I), I = 1,N)
WRITE ( 01,* ) (PHID(I), I = 1,N)
CLOSE ( 01 )
STOP
END

C
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION AK ( X )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ
C
AK = 1.D-1

C
RETURN
END

C
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION AF ( X )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C ПРАВАЯ ЧАСТЬ УРАВНЕНИЯ
C
AF = 1.DO
IF (X.GT.0.5DO) AF = 0.DO

C
RETURN
END

C
SUBROUTINE A01 ( N, M, TAU, V, F, A, B, C, FF, YY )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ А0 V = F

```

```

C
  DIMENSION V(N,M), F(N,M),
+           A(M), C(M), B(M), FF(M), YY(M)
C
  DO I = 2, N-1
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
  DO K = 2, M-1
    A(K) = 1.DO / (TAU*TAU)
    B(K) = A(K)
    C(K) = A(K) + B(K)
    FF(K) = F(I,K)
  END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
  B(1) = 0.DO
  C(1) = 1.DO
  FF(1) = 0.DO
  A(M) = 0.DO
  C(M) = 1.DO
  FF(M) = 0.DO
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
C
  ITASK = 1
  CALL PROG3 ( M, A, C, B, FF, YY, ITASK )
  DO K = 2, M-1
    V(I,K) = YY(K)
  END DO
  END DO
  RETURN
  END
C
SUBROUTINE ATILDE ( N, M, H, TAU, V, F, WORK, A, B, C, FF, YY )
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ F = ATILDE V
C
  DIMENSION V(N,M), F(N,M), WORK(N,M),
+           A(M), C(M), B(M), FF(M), YY(M)
C
  DO I = 2, N-1
    DO K = 2, M-1
      X1 = (I-0.5DO) * H
      X2 = (I+0.5DO) * H
      AA = AK(X1) / (H*H)
      BB = AK(X2) / (H*H)
      F(I,K) = - AA*(V(I-1,K+1) - V(I-1,K-1))
+             + (AA + BB)*(V(I,K+1) - V(I,K-1))
+             - BB*(V(I+1,K+1) - V(I+1,K-1))
      F(I,K) = F(I,K) / (2.DO*TAU)
    
```

```

      END DO
    END DO
    CALL A0I ( N, M, TAU, WORK, F, A, B, C, FF, YY )
C
    DO I = 2, N-1
      DO K = 2, M-1
        X1 = (I-0.5DO) * H
        X2 = (I+0.5DO) * H
        AA = AK(X1) / (H*H)
        BB = AK(X2) / (H*H)
        F(I,K) = - AA*(WORK(I-1,K+1) - WORK(I-1,K-1))
+             + (AA + BB)*(WORK(I,K+1) - WORK(I,K-1))
+             - BB*(WORK(I+1,K+1) - WORK(I+1,K-1))
        F(I,K) = F(I,K) / (2.DO*TAU)
      END DO
    END DO
C
    AA = 1.DO / (TAU*TAU)
    DO I = 2, N-1
      DO K = 2, M-1
        F(I,K) = - AA*(V(I,K-1) - 2.DO*V(I,K) + V(I,K+1))
+             - F(I,K)
      END DO
    END DO
    RETURN
  END

```

В подпрограмме A0I решается уравнение  $A_0 v = f$ , в подпрограмме ATILDE по заданному  $v$  вычисляется  $f = \tilde{A}v$ .

### 6.4.5. Результаты расчетов

Представленный листинг программы PROBLEM8 соответствует решению обратной задачи (6.110)–(6.113) при

$$k(x) = 0,1, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 0,5, \\ 0, & 0,5 < x < 1, \end{cases}$$

$$l = 1, \quad T = 1.$$

Задача решается на равномерной сетке с  $h = 0,02$ ,  $\tau = 0,02$ .

Иллюстрацией корректности рассматриваемой задачи являются данные расчетов с возмущением граничного условия при  $t = T$  (функции  $\varphi(x)$  в (6.113)). В рамках квазиреального эксперимента полученное решение при  $t = T$  возмущалось по закону

$$\varphi_\delta(x) = \varphi(x) + 2\delta \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \right), \quad x \in \omega,$$

где  $\sigma(x)$  — случайная функция, нормально распределенная на интервале  $[0, 1]$ , а  $\delta$  задает уровень погрешности.

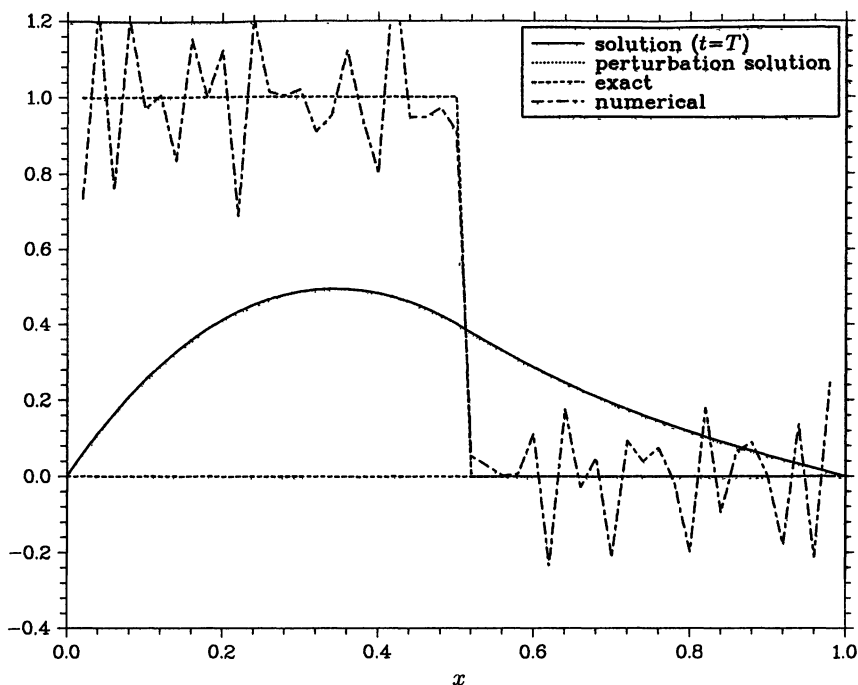


Рис. 6.13. Решение задачи при  $\delta = 0,0005$

На рис. 6.13 представлены точная и восстановленная зависимость правой части от пространственной переменной, разностное решение (точное и возмущенное) прямой задачи на конечный момент времени при уровне погрешности  $\delta = 0,0005$ . Аналогичные данные при увеличении погрешности до  $\delta = 0,001$  показаны на рис. 6.14, а при  $\delta = 0,0002$  — на рис. 6.15 (с. 244). Следует заметить достаточно большую чувствительность восстановления правой части от погрешности в задании решения при  $t = T$ : при относительной погрешности в 0,1% при задании  $\varphi(x)$  правая часть определяется с точностью приблизительно в 25%.

## 6.5. Восстановление правой части эллиптического уравнения по данным граничных наблюдений

Рассматривается классическая обратная задача теории потенциала по определению неизвестной правой части эллиптического уравнения

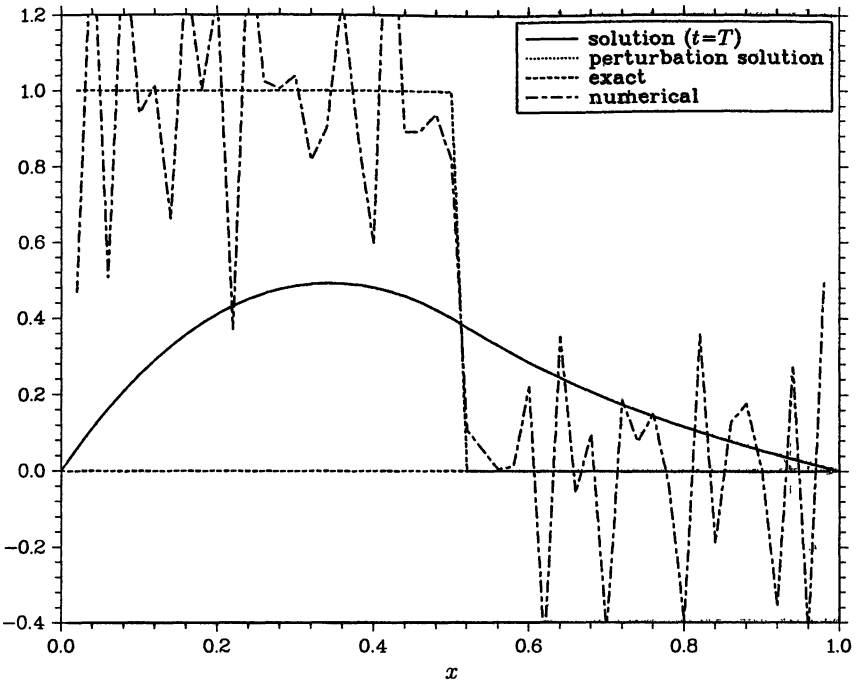


Рис. 6.14. Решение задачи при возмущениях  $\delta = 0,001$

в условиях, когда дополнительные данные заданы на границе расчетной области.

### 6.5.1. Постановка обратной задачи

Будем рассматривать модельную обратную задачу по определению неизвестной правой части по результатам наблюдений на границе области. Для простоты изложения ограничимся двумерным уравнением Пуассона. Начнем с формулировки прямой задачи.

В ограниченной области  $\Omega$  функция  $u(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u \equiv -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{6.144}$$

Будем рассматривать задачу, когда уравнение (6.144) дополняется однородными граничными условиями первого рода:

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{6.145}$$



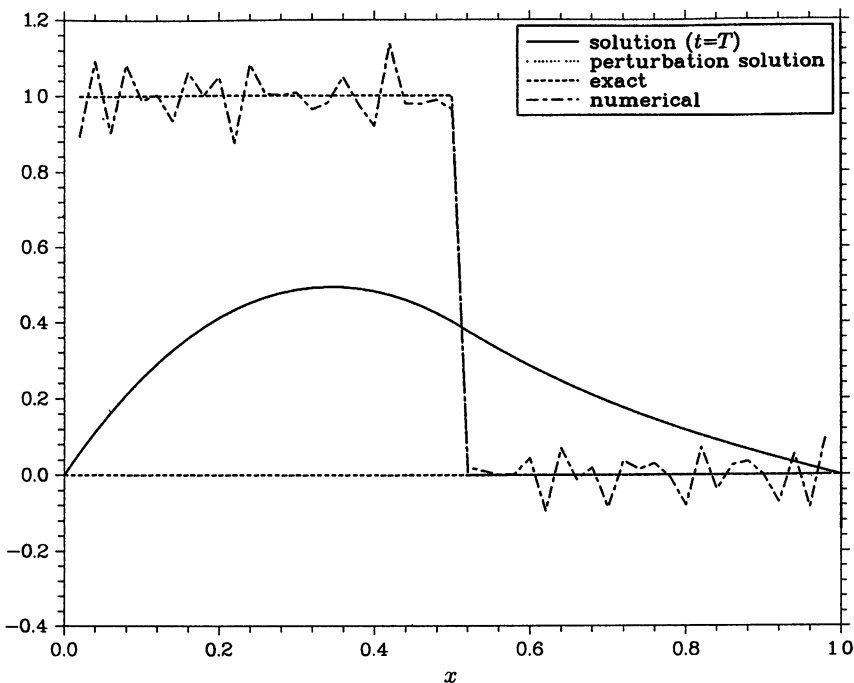


Рис. 6.15. Решение задачи при возмущениях  $\delta = 0,0002$

В виде (6.144), (6.145) формулируется прямая задача, когда в уравнении (6.144) правая часть  $f(x)$  известна.

Среди обратных задач для эллиптических уравнений выделим задачу идентификации правой части. Будем считать, что дополнительные измерения доступны на границе области. Дополнительно к условиям (6.145) заданы также граничные условия второго рода, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.146)$$

где  $n$  — внешняя по отношению к  $\Omega$  нормаль.

В такой общей постановке обратная задача по определению пары функций  $\{u(x), f(x)\}$  из условий (6.144)–(6.146) имеет неединственное решение. Это утверждение не требует специальных пояснений, достаточно рассмотреть обратную задачу для круга с правой частью, зависящей от расстояния до центра этого круга. Такая неединственность обусловлена тем, что мы пытаемся восстановить двумерную функцию (правую часть  $f(x)$ ) по функции меньшей размерности  $\mu(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ ).

### 6.5.2. Единственность решения обратной задачи

Возможность однозначного определения правой части существует в случае, когда неизвестная правая часть не зависит от одной переменной. Подобная ситуация фактически имела место при исследовании задач идентификации правой части параболического уравнения, когда восстанавливалась неизвестная зависимость правой части от времени, либо от пространственных переменных.

Не пытаясь рассмотреть максимально общий случай, обратимся к характерному примеру. Будем полагать, что правая часть (6.144) представляется в виде

$$f(x) = \varphi_1(x_2) + x_1 \varphi_2(x_2). \quad (6.147)$$

Ставится задача определения двух функций  $\varphi_\alpha(x_2)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , не зависящих от одной переменной (от  $x_1$ ) из (6.144)–(6.146).

Переформулируем обратную задачу (6.144)–(6.147), исключив неизвестные  $\varphi_\alpha(x_2)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Двукратное дифференцирование уравнения (6.144) по  $x_1$  с учетом (6.147) дает

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta u = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6.148)$$

Тем самым, приходим к краевой задаче для уравнения составного типа (6.145), (6.146), (6.148).

Покажем, что решение задачи (6.145), (6.146), (6.148) единственно. Для этого достаточно установить, что решение задачи с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.149)$$

есть  $u(x) \equiv 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Домножим уравнение (6.148) на  $u(x)$  и проинтегрируем по всей области  $\Omega$ , что дает

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Delta u u \, dx = 0.$$

Принимая во внимание однородные граничные условия (6.145) и перестановочность операторов  $\partial/\partial x_1$  и  $\Delta$ , получим

$$\int_{\Omega} v \Delta v \, dx = 0, \quad v = \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

Пара однородных граничных условий (6.145), (6.149) обеспечивает

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

В этих условиях

$$\int_{\Omega} v \Delta v \, dx = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 dx = 0$$

и, тем самым,  $v(x) = 0$  во всей области  $\Omega$ . Из условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x \in \Omega$$

и краевых условий (6.145) следует, что единственным решением задачи (6.145), (6.148), (6.149) является  $u(x) \equiv 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Можно получить и более содержательные априорные оценки решения краевой задачи (6.145), (6.146), (6.148) и доказать единственность в более слабых предположениях. Эту проблему мы рассмотрим ниже на сеточном уровне.

### 6.5.3. Разностная задача

Предположим, что расчетная область является прямоугольником:

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_{\alpha} < l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}.$$

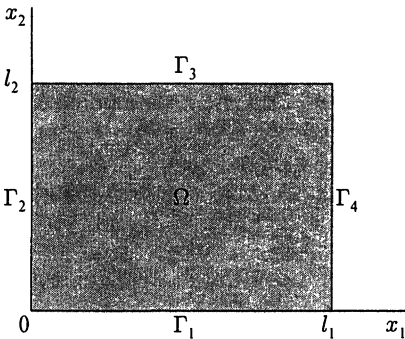


Рис. 6.16. Расчетная область

Для сторон прямоугольника  $\Omega$  используем обозначения, приведенные на рис. 6.16, так что

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

Правую часть уравнения (6.144) будем искать в классе (6.147) при дополнительных условиях на частях границы  $\Gamma_2, \Gamma_4$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) = \mu_1(x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(l_1, x_2) = \mu_2(x_2).$$

(6.150)

Задание дополнительных краевых условий на  $\Gamma_1, \Gamma_3$  (см. (6.146)) переопределяет задачу.

По каждому направлению  $x_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$  введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_{\alpha} = \{x_{\alpha} \mid x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, i_{\alpha} = 0, 1, \dots, N_{\alpha}, N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha}\},$$

причем

$$\omega_{\alpha} = \{x_{\alpha} \mid x_{\alpha} = i_{\alpha} h_{\alpha}, i_{\alpha} = 1, 2, \dots, N_{\alpha} - 1, N_{\alpha} h_{\alpha} = l_{\alpha}\},$$

$$\partial\omega_{\alpha} = \{x_{\alpha} \mid x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}\}.$$

Для сетки в прямоугольнике  $\Omega$  используются обозначения

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_\alpha \in \bar{\omega}_\alpha, \alpha = 1, 2\},$$

$$\omega = \omega_1 \times \omega_2.$$

В стандартных обозначениях теории разностных схем для внутренних узлов определим разностный оператор Лапласа

$$\Delta y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \omega.$$

Прямой задаче (6.144), (6.145) ставится в соответствие разностная задача

$$-\Delta y = f(x), \quad x \in \omega, \quad (6.151)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (6.152)$$

В обратной задаче правая часть ищется в классе (6.147) по дополнительным условиям (6.150). Для того чтобы перейти к разностному аналогу задачи (6.144), (6.145), (6.147), (6.150), определим сеточную функцию  $v = -\Delta y$  не только для внутренних узлов (см. (6.151)), но и на множестве граничных узлов.

Удобно ввести фиктивные узлы с  $i_1 = -1$  и  $i_1 = N_1 + 1$ , расширив сетку по переменной  $x_1$  на один узел с обеих сторон. Аппроксимируем краевые условия (6.150) на этой расширенной сетке. С погрешностью  $O(h_1^2)$  имеем

$$\frac{y(h_1, x_2) - y(-h_1, x_2)}{2h_1} = \mu_1(x_2), \quad (6.153)$$

$$\frac{y(l_1 + h_1, x_2) - y(l_1 - h_1, x_2)}{2h_1} = \mu_2(x_2). \quad (6.154)$$

С учетом краевых условий (6.145) на левой границе получим

$$v(0, x_2) = -\Delta y(0, x_2) = -\frac{y(h_1, x_2) - 2y(0, x_2) + y(-h_1, x_2)}{h_1^2}.$$

Принимая во внимание (6.153), приходим к выражению

$$v(0, x_2) = -\frac{2}{h_1^2} y(h_1, x_2) + \frac{2}{h_1} \mu_1(x_2). \quad (6.155)$$

Аналогично на  $\Gamma_4$  получим

$$v(l_1, x_2) = -\frac{2}{h_1^2} y(l_1 - h_1, x_2) - \frac{2}{h_1} \mu_1(x_2). \quad (6.156)$$

Двукратное разностное дифференцирование (6.151) дает уравнение

$$v_{\bar{x}_1 x_1} = 0, \quad x \in \omega. \quad (6.157)$$

Граничные условия для него имеют вид (6.155), (6.156). При известной  $v$  решение определяется (см. (6.151), (6.152)) из

$$-\Delta y = v(x), \quad x \in \omega, \quad (6.158)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (6.159)$$

Тем самым приходим к системе из двух сеточных уравнений Пуассона для определения пары  $\{y, v\}$ . Эти два уравнения завязываются посредством граничных условий (6.155), (6.156).

Удобно переформулировать краевую задачу с неоднородными граничными условиями (6.155)–(6.157) как задачу с однородными граничными условиями для неоднородного уравнения во внутренних узлах. Принимая во внимание (6.155), в приграничных узлах имеем

$$\frac{2v(h_1, x_2) - v(2h_1, x_2)}{h_1^2} = \frac{v(0, x_2)}{h_1^2} = -\frac{2}{h_1^4}y(h_1, x_2) + \frac{2}{h_1^3}\mu_1(x_2).$$

Из (6.156) получим

$$\frac{2v(l_1 - h_1, x_2) - v(l_1 - 2h_1, x_2)}{h_1^2} = -\frac{2}{h_1^4}y(l_1 - h_1, x_2) - \frac{2}{h_1^3}\mu_2(x_2).$$

Определим сеточные операторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , на множестве сеточных функций обращающихся в нуль в граничных узлах:

$$A_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad x \in \omega.$$

Тогда краевую задачу (6.155)–(6.157) можно записать в виде

$$A_1 v = -A_0 y + \phi, \quad x \in \omega. \quad (6.160)$$

Здесь сеточный оператор  $A_0$  определяется выражением

$$A_0 y = \begin{cases} \frac{2}{h_1^4}y(h_1, x_2), & x_1 = h_1, \\ 0, & h_1 < x_1 < l_1 - h_1, \\ \frac{2}{h_1^4}y(l_1 - h_1, x_2), & x_1 = l_1 - h_1. \end{cases}$$

Правая часть  $\phi$  не равна нулю только в приграничных узлах:

$$\phi = \begin{cases} -\frac{2}{h_1^3}\mu_1(x_2), & x_1 = h_1, \\ 0, & h_1 < x_1 < l_1 - h_1, \\ \frac{2}{h_1^3}\mu_2(x_2), & x_1 = l_1 - h_1. \end{cases}$$

Во введенных обозначениях краевая задача (6.158), (6.159) принимает вид

$$(A_1 + A_2)y = v, \quad x \in \omega. \tag{6.161}$$

Тем самым от (6.155)–(6.159) переходим к системе (6.160), (6.161). Ее удобно записать в виде одного операторного уравнения

$$Ay = \phi, \tag{6.162}$$

где

$$A = (A_1 + A_2)A_1 + A_0. \tag{6.163}$$

Шаблон этой разностной схемы показан на рис. 6.17.

В гильбертовом пространстве  $H = L_2(\omega)$  введем обычным образом скалярное произведение и норму:

$$(y, w) \equiv \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h_1h_2, \quad \|y\| \equiv (y, y)^{1/2}.$$

В  $H$  операторы

$$A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad A_0 = A_0^* \geq 0$$

и поэтому в (6.162)  $A = A^* > 0$ . В силу этого сеточная задача (6.162) имеет единственное решение.

Мы привели достаточно общую схему построения дискретного аналога неклассической краевой задачи (6.145), (6.148), (6.150), которая пригодна при решении и более сложных задач. В нашем случае задача может быть существенно упрощена за счет того, что решение задачи (6.155)–(6.157) можно выписать явно. Необходимо отметить, что такое преобразование наиболее полно учитывает специфику рассматриваемой обратной задачи и особенно прозрачно именно на сеточном уровне.

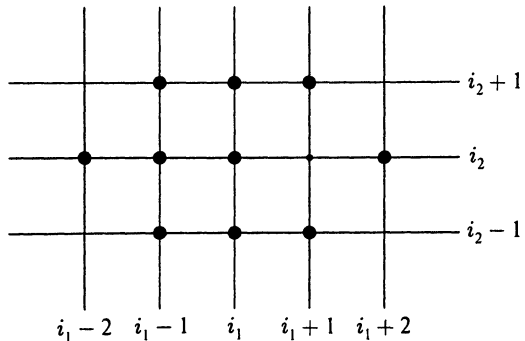


Рис. 6.17. Шаблон разностной схемы

Общим решением сеточного уравнения (6.157) является линейная функция переменной  $x_1$ :

$$v(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right) v(0, x_2) + \frac{x_1}{l_1} v(l_1, x_2).$$

Принимая во внимание граничные условия (6.155), (6.156), получим

$$v(x_1, x_2) = - \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right) \frac{2}{h_1^2} y(h_1, x_2) - \frac{x_1}{l_1} \frac{2}{h_1^2} y(l_1 - h_1, x_2) + \psi(x_1, x_2), \quad (6.164)$$

где

$$\psi(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right) \frac{2}{h_1} \mu_1(x_2) - \frac{x_1}{l_1} \frac{2}{h_1} \mu_2(x_2).$$

Подстановка (6.164) в (6.151) приводит нас к сеточному уравнению

$$-\Delta y + \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right) \frac{2}{h_1^2} y(h_1, x_2) + \frac{x_1}{l_1} \frac{2}{h_1^2} y(l_1 - h_1, x_2) = \psi(x), \quad x \in \omega. \quad (6.165)$$

Тем самым решение обратной задачи по идентификации правой части уравнения (6.151) в классе (6.147) свелось к решению краевой задачи (6.152), (6.165). Уравнение (6.165) является сеточным нагруженным уравнением.

#### 6.5.4. Решение сеточной задачи

Для нахождения решения сеточной задачи мы используем метод разделения переменных. Такой подход можно применять для сеточной задачи (6.152) с составным сеточным оператором  $A$ , определяемым согласно (6.153). Остановимся на второй возможности, когда ищется решение краевой задачи для нагруженного сеточного эллиптического уравнения (6.152), (6.165).

Задачу (6.152), (6.165) запишем в виде уравнения

$$(A_1 + A_2) y + q_1(x_1) y(h_1, x_2) + q_2(x_1) y(l_1 - h_1, x_2) = \psi(x), \quad x \in \omega, \quad (6.166)$$

в котором  $q_\alpha \geq 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Обозначим через  $\lambda_k$ ,  $v_k(x_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  собственные значения и собственные функции разностного оператора  $A_2$ :

$$A_2 v = \lambda v.$$

Решение этой сеточной спектральной задачи хорошо известно:

$$\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k\pi h_2}{2l_2}, \quad v_k(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{k\pi x_2}{l_2}.$$

Собственные функции ортонормированы:

$$(v_k, v_m)^{(2)} = \delta_{km}, \quad \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

где

$$(v, w)^{(2)} = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} v(x_2)w(x_2)h_2$$

есть скалярное произведение в  $L_2(\omega_2)$ .

Решение задачи (6.166) будем искать в виде разложения по собственным функциям оператора  $A_2$

$$y(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N_2-1} c_k(x_1)v_k(x_2).$$

Подстановка в (6.166) приводит нас к необходимости решения сеточных задач

$$(A_1 + \lambda_k)c_k(x_1) + q_1(x_1)c_k(h_1) + q_2(x_1)c_k(l_1 - h_1) = \psi_k(x_1), \quad (6.167)$$

где

$$\psi_k(x_1) = (\psi, v_k)^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Специального внимания заслуживают вопросы решения этих  $N_2 - 1$  одномерных сеточных задач. В случае (6.167) необходимо найти решение сеточной краевой задачи

$$-w_{\bar{x}_1 x_1} + \lambda w + q_1(x_1)w(h_1) + q_2(x_1)w(l_1 - h_1) = r(x_1), \quad (6.168)$$

$$w(0) = 0, \quad w(l_1) = 0. \quad (6.169)$$

Представим решение задачи (6.168), (6.169) в следующем специальном виде

$$w(x_1) = s(x_1) + s^{(1)}(x_1)w(h_1) + s^{(2)}(x_1)w(l_1 - h_1). \quad (6.170)$$

Подставим это выражение в (6.168) и выберем функции  $s_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , собирая и приравнявая нулю члены с  $w(h_1)$ ,  $w(l_1 - h_1)$ . Это дает три трехточечных сеточных уравнения для вспомогательных функций  $s(x_1)$ ,  $s_\alpha(x_1)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Граничные условия с учетом (6.169) возьмем однородными, так что

$$-s_{\bar{x}_1 x_1} + \lambda s = r(x_1), \quad (6.171)$$

$$s(0) = 0, \quad s(l_1) = 0, \quad (6.172)$$



$$-s_{\bar{x}_1 x_1}^{(1)} + \lambda s^{(1)} = -q_1(x_1), \quad (6.173)$$

$$s^{(1)}(0) = 0, \quad s^{(1)}(l_1) = 0, \quad (6.174)$$

$$-s_{\bar{x}_1 x_1}^{(2)} + \lambda s^{(2)} = -q_2(x_1), \quad (6.175)$$

$$s^{(2)}(0) = 0, \quad s^{(2)}(l_1) = 0. \quad (6.176)$$

После решения трех стандартных задач (6.171)–(6.176) находятся  $w(h_1)$  и  $w(l_1 - h_1)$ . Из представления (6.170) непосредственно вытекает

$$w(h_1) = s(h_1) + s^{(1)}(h_1)w(h_1) + s^{(2)}(h_1)w(l_1 - h_1), \quad (6.177)$$

$$w(l_1 - h_1) = s(l_1 - h_1) + s^{(1)}(l_1 - h_1)w(h_1) + s^{(2)}(l_1 - h_1)w(l_1 - h_1). \quad (6.178)$$

Разрешимость этой системы связана с определителем

$$D = (1 - s^{(1)}(h_1))(1 - s^{(2)}(l_1 - h_1)) - s^{(2)}(h_1)s^{(1)}(l_1 - h_1).$$

Его отличие от нуля легко можно гарантировать при определенных ограничениях. С учетом того, что  $\lambda > 0$  и  $q_\alpha \geq 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , имеем  $s^{(\alpha)}(x_1) \geq 0$ ,  $0 \leq x_1 \leq l_1$ . Поэтому  $D > 0$ , например, при достаточно малых  $l_1$ .

На самом деле положительность определителя системы (6.177), (6.178) имеет место всегда. Чтобы показать это, необходимо вспомнить (см. (6.164)) конкретные выражения для сеточных функций  $q_\alpha(x_1)$ ,  $\alpha = 1, 2$ :

$$q_1(x_1) = \left(1 - \frac{x_1}{l_1}\right) \frac{2}{h_1^2}, \quad q_2(x_1) = \frac{x_1}{l_1} \frac{2}{h_1^2}.$$

В силу этого для решений краевых задач (6.173), (6.174) и (6.175), (6.176) имеют место соотношения

$$s^{(1)}(x_1) = s^{(2)}(l_1 - x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1.$$

Это означает, в частности, что мы можем и не решать (при используемой равномерной разностной сетке) одну из сеточных краевых задач (6.173), (6.174) и (6.175), (6.176). В силу этого

$$D = 1 - 2s^{(1)}(h_1) + (s^{(1)}(h_1))^2 - (s^{(1)}(l_1 - h_1))^2$$

и с учетом  $s^{(1)}(h_1) > s^{(1)}(l_1 - h_1)$  получим  $D > 1$ .

После определения сеточных функций  $s(x_1)$ ,  $s^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , из (6.171)–(6.176) и нахождения  $w(h_1)$  и  $w(l_1 - h_1)$  из системы уравнений (6.177), (6.178) решение задачи (6.168), (6.169) находится в виде (6.170). Программная реализация такого алгоритма обсуждается ниже.

### 6.5.5. Программа

Используемый вычислительный алгоритм базируется на быстром преобразовании Фурье по переменной  $x_2$ . При реализации удобно ориентироваться на ненормированные собственные функции

$$\sin \frac{k\pi x_2}{l_2} = \sin \frac{k\pi i_2}{N_2}, \quad x_2 = i_2 h_2.$$

При этом любая сеточная функция  $f_{i_2}$ , заданная при  $i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  (на  $\omega_2$ ), разлагается в ряд

$$f_{i_2} = \frac{2}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2-1} \xi_k \sin \frac{k\pi i_2}{N_2}, \quad i_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

где

$$\xi_k = \sum_{i_2=1}^{N_2-1} f_{i_2} \sin \frac{k\pi i_2}{N_2}, \quad k = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Воспользуемся подпрограммой SINT из библиотеки программ SLATEC. Мы приведем лишь описание этой подпрограммы, которая является частью большого пакета FFTPACK по алгоритмам быстрого преобразования Фурье. Вы можете использовать и другие имеющиеся подпрограммы быстрого преобразования Фурье, доступные для использования на вашем компьютере.

#### Подпрограмма SINT

```
*DECK SINT
      SUBROUTINE SINT (N, X, WSAVE)
C***BEGIN PROLOGUE  SINT
C***PURPOSE  Compute the sine transform of a real, odd sequence.
C***LIBRARY   SLATEC (FFTPACK)
C***CATEGORY  J1A3
C***TYPE      SINGLE PRECISION (SINT-S)
C***KEYWORDS  FFTPACK, FOURIER TRANSFORM
C***AUTHOR   Swarztrauber, P. N., (NCAR)
C***DESCRIPTION
C
C  Subroutine SINT computes the discrete Fourier sine transform
C  of an odd sequence X(I).  The transform is defined below at
C  output parameter X.
C
C  SINT is the unnormalized inverse of itself since a call of SINT
C  followed by another call of SINT will multiply the input sequence
C  X by 2*(N+1).
C
C  The array WSAVE which is used by subroutine SINT must be
C  initialized by calling subroutine SINTI(N,WSAVE).
```

```

C   Input Parameters
C
C   N           the length of the sequence to be transformed. The method
C               is most efficient when N+1 is the product of small primes.
C
C   X           an array which contains the sequence to be transformed
C
C
C   WSAVE      a work array with dimension at least INT(3.5*N+16)
C               in the program that calls SINT. The WSAVE array must be
C               initialized by calling subroutine SINTI(N,WSAVE), and
C               different WSAVE array must be used for each different
C               value of N. This initialization does not have to be
C               repeated so long as N remains unchanged. Thus subsequent
C               transforms can be obtained faster than the first.
C
C   Output Parameters
C
C   X           For I=1,...,N
C
C               X(I)= the sum from K=1 to K=N
C
C                   2*X(K)*SIN(K*I*PI/(N+1))
C
C               A call of SINT followed by another call of
C               SINT will multiply the sequence X by 2*(N+1).
C               Hence SINT is the unnormalized inverse
C               of itself.
C
C   WSAVE      contains initialization calculations which must not be
C               destroyed between calls of SINT.
C
C***REFERENCES P. N. Swarztrauber, Vectorizing the FFTs, in Parallel
C               Computations (G. Rodrigue, ed.), Academic Press,
C               1982, pp. 51-83.
C***ROUTINES CALLED RFFTF
C***REVISION HISTORY (YYMMDD)
C   790601 DATE WRITTEN
C   830401 Modified to use SLATEC library source file format.
C   860115 Modified by Ron Boisvert to adhere to Fortran 77 by
C           (a) changing dummy array size declarations (1) to (*),
C           (b) changing definition of variable SQRT3 by using
C               FORTRAN intrinsic function SQRT instead of a DATA
C               statement.
C   881128 Modified by Dick Valent to meet prologue standards.
C   891009 Removed unreferenced statement label. (WRB)
C   891009 REVISION DATE from Version 3.2
C   891214 Prologue converted to Version 4.0 format. (BAB)
C   920501 Reformatted the REFERENCES section. (WRB)
C***END PROLOGUE SINT

```

Вспомогательная подпрограмма SINTI используется для инициализации подпрограммы SINT.

## Подпрограмма SINTI

```

*DECK SINTI
      SUBROUTINE SINTI (N, WSAVE)
C***BEGIN PROLOGUE  SINTI
C***PURPOSE  Initialize a work array for SINT.
C***LIBRARY  SLATEC (FFTPACK)
C***CATEGORY  J1A3
C***TYPE     SINGLE PRECISION (SINTI-S)
C***KEYWORDS  FFTPACK, FOURIER TRANSFORM
C***AUTHOR  Swarztrauber, P. N., (NCAR)
C***DESCRIPTION
C
C  Subroutine SINTI initializes the array WSAVE which is used in
C  subroutine SINT.  The prime factorization of N together with
C  a tabulation of the trigonometric functions are computed and
C  stored in WSAVE.
C
C  Input Parameter
C
C  N          the length of the sequence to be transformed.  The method
C             is most efficient when N+1 is a product of small primes.
C
C  Output Parameter
C
C  WSAVE     a work array with at least INT(3.5*N+16) locations.
C             Different WSAVE arrays are required for different values
C             of N.  The contents of WSAVE must not be changed between
C             calls of SINT.
C
C***REFERENCES  P. N. Swarztrauber, Vectorizing the FFTs, in Parallel
C               Computations (G. Rodrigue, ed.), Academic Press,
C               1982, pp. 51-83.
C***ROUTINES CALLED  RFFTI
C***REVISION HISTORY  (YYMMDD)
C   790601  DATE WRITTEN
C   830401  Modified to use SLATEC library source file format.
C   860115  Modified by Ron Boisvert to adhere to Fortran 77 by
C           (a) changing dummy array size declarations (1) to (*),
C           (b) changing references to intrinsic function FLOAT
C               to REAL, and
C           (c) changing definition of variable PI by using
C               FORTRAN intrinsic function ATAN instead of a DATA
C               statement.
C   881128  Modified by Dick Valent to meet prologue standards.
C   890531  Changed all specific intrinsics to generic.  (WRB)
C   890531  REVISION DATE from Version 3.2
C   891214  Prologue converted to Version 4.0 format.  (BAB)
C   920501  Reformatted the REFERENCES section.  (WRB)
C***END PROLOGUE  SINTI

```

Для приближенного решения обратной задачи используется программа PROBLEM9.

## Программа PROBLEM9

```

C
C   PROBLEM9 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ
C               УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ
C
C
C   PARAMETER ( DELTA = 0.0, N1 = 257, N2 = 257 )
C
C   DIMENSION U(N1,N2), Y(N1,N2), F(N1,N2), X1(N1), X2(N2),
+           FIT1(N2), FIT2(N2), FI1(N2), FI2(N2),
+           AM1(N2), AM2(N2), AMD1(N2), AMD2(N2),
+           A(N1), B(N1), C(N1), FF(N1), YY(N1), S(N1), S1(N1),
+           WSAVE(4*N2), WW(N2-2)
C
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   X1L, X2L - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО НИЖНЕГО УГЛА
C               РАСЧЕТНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ;
C   X1R, X2R - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО ВЕРХНЕГО УГЛА;
C   N1, N2   - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО СООТВЕТСТВУЮЩИМ
C               НАПРАВЛЕНИЯМ;
C   U(N1,N2) - СЕТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ;
C   FI(N2),
C   FI2(N2)  - ТОЧНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ;
C   AM1(N2),
C   AM2(N2)  - ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   AMD1(N2),
C   AMD2(N2) - ВОЗМУЩЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ;
C   FIS1(N2),
C   FIS2(N2) - НАЙДЕННЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ;
C
C   X1L = 0.
C   X1R = 1.
C   X2L = 0.
C   X2R = 1.
C   PI  = 3.1415926
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H1 = (X1R - X1L) / (N1-1)
C   H2 = (X2R - X2L) / (N2-1)
C   DO I = 1, N1
C       X1(I) = X1L + (I-1)*H1
C   END DO
C   DO J = 1, N2
C       X2(J) = X2L + (J-1)*H2
C   END DO
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

```

```

C
C   ТОЧНАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
DO J = 2, N2-1
  FIT1(J) = AF1(X2(J))
  FIT2(J) = AF2(X2(J))
  DO I = 2, N1-1
    F(I,J) = FIT1(J) + X1(I) * FIT2(J)
  END DO
END DO

C
C   ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C
CALL SINTI( N2-2, WSAVE )
DO I = 2, N1-1
  DO J = 2, N2-1
    WW(J-1) = F(I,J)
  END DO
  CALL SINT( N2-2, WW, WSAVE )
  DO J = 2, N2-1
    F(I,J) = WW(J-1)
  END DO
END DO

C
C   РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ (ПО ПЕРЕМЕННОЙ X1) ЗАДАЧ
C
DO J = 2, N2-1
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
  ALAM = 4./H2**2*(SIN(PI*(J-1)/(2.*(N2-1))))**2
  DO I = 2, N1-1
    A(I) = 1. / (H1*H1)
    B(I) = 1. / (H1*H1)
    C(I) = A(I) + B(I) + ALAM
    FF(I) = F(I,J)
  END DO

C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
  B(1) = 0.
  C(1) = 1.
  FF(1) = 0.
  A(N1) = 0.
  C(N1) = 1.
  FF(N1) = 0.

C
C   РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ
C
  ITASK = 1
  CALL PROGS3 ( N1, A, C, B, FF, YY, ITASK )
  DO I = 1, N1
    F(I,J) = YY(I)
  
```

```

        END DO
    END DO
C
C    ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C
    DO I = 2, N1-1
        DO J = 2, N2-1
            WW(J-1) = F(I,J)
        END DO
        CALL SINT( N2-2, WW, WSAVE )
        DO J = 2, N2-1
            U(I,J) = 1./(2.*(N2-1))*WW(J-1)
        END DO
    END DO
C
C    ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
C
    DO J = 1, N2
        AM1(J) = U(2,J) / H1
        AM2(J) = - U(N1-1,J) / H1
    END DO
C
C    ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
    DO J = 1, N2
        AMD1(J) = AM1(J) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
        AMD2(J) = AM2(J) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
    END DO
C
C    ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C    ПРАВАЯ ЧАСТЬ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ
C
    DO I = 2, N1-1
        Q1 = 2.*(N1-I) / (X1R - X1L)
        Q2 = 2.*(I-1) / (X1R - X1L)
        DO J = 2, N2-1
            F(I,J) = Q1 * AMD1(J) - Q2 * AMD2(J)
        END DO
    END DO
C
C    ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C
    CALL SINTI( N2-2, WSAVE )
    DO I = 2, N1-1
        DO J = 2, N2-1
            WW(J-1) = F(I,J)
        END DO
        CALL SINT( N2-2, WW, WSAVE )
        DO J = 2, N2-1
            F(I,J) = WW(J-1)
        END DO
    END DO

```

```

C
C  РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ (ПО ПЕРЕМЕННОЙ X1) ЗАДАЧ
C
DO J = 2, N2-1
C
C  ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
C
C  КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      ALAM = 4./H2**2*(SIN(PI*(J-1)/(2.*(N2-1))))**2
      DO I = 2, N1-1
          A(I) = 1. / (H1*H1)
          B(I) = 1. / (H1*H1)
          C(I) = A(I) + B(I) + ALAM
          FF(I) = F(I,J)
      END DO
C
C  ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.
      C(1) = 1.
      FF(1) = 0.
      A(N1) = 0.
      C(N1) = 1.
      FF(N1) = 0.
C
C  РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ
C
      ITASK = 1
      CALL PROGS3 ( N1, A, C, B, FF, S, ITASK )
      DO I = 2, N1-1
          FF(I) = - 2.*(N1-I) / ((N1-1.)*H1*H1)
      END DO
      ITASK = 2
      CALL PROGS3 ( N1, A, C, B, FF, S1, ITASK )
C
C  РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ УРАВНЕНИЙ
C
      DD = (1. - S1(2))**2 - (S1(N1-1))**2
      W1 = ((1. - S1(2))*S(2) + S1(N1-1)*S(N1-1))/DD
      W2 = ((1. - S1(2))*S(N1-1) + S1(N1-1)*S(2))/DD
      DO I = 2, N1-1
          F(I,J) = S(I) + W1*S1(I) + W2*S1(N1+1-I)
      END DO
      END DO
C
C  ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C
DO I = 2, N1-1
DO J = 2, N2-1
      WW(J-1) = F(I,J)
      END DO
      CALL SINT( N2-2, WW, WSAVE)

```



```

      DO J = 2, N2-1
        Y(I,J) = 1./(2.*(N2-1))*WW(J-1)
      END DO
END DO
C
C   ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
DO I = 2, N1-1
  DO J = 2, N2-1
    F(I,J) = - (Y(I+1,J) - 2.*Y(I,J) + Y(I-1,J)) / (H1*H1)
+   - (Y(I,J+1) - 2.*Y(I,J) + Y(I,J-1)) / (H2*H2)
  END DO
END DO
C
DO J = 2, N2-1
  FI1(J) = 2.*AMD1(J)/H1-2.*Y(2,J)/(H1*H1)
  FI2(J) = - 2.*(AMD2(J)+AMD1(J))/((X1R-X1L)*H1)
+   - 2.*(Y(N1-1,J)-Y(2,J))/((X1R-X1L)*H1*H1)
END DO
WRITE ( 01, * ) (FI1(J),J=2,N2-1)
WRITE ( 01, * ) (FIT1(J),J=2,N2-1)
WRITE ( 01, * ) (FI2(J),J=2,N2-1)
WRITE ( 01, * ) (FIT2(J),J=2,N2-1)
CLOSE ( 01 )
C
STOP END

FUNCTION AF1 ( X2 )
C
C   ПЕРВАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ
C
AF1 = 1.
IF (X2.GT.0.5) AF1 = 0.
C
RETURN END

FUNCTION AF2 ( X2 )
C
C   ВТОРАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ
C
AF2 = X2
C
RETURN END

SUBROUTINE PROGS3 ( N, A, C, B, F, Y, ITASK )
C
C   МЕТОД ПРОГОНКИ
C   ДЛЯ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ
C
ITASK = 1: ФАКТОРИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ;
C
ITASK = 2: ТОЛЬКО РЕШЕНИЕ
C

```

```

DIMENSION A(N), C(N), B(N), F(N), Y(N)
IF (ITASK.EQ.1) THEN
C
  B(1) = B(1) / C(1)
  DO I = 2, N
    C(I) = C(I) - B(I-1)*A(I)
    B(I) = B(I) / C(I)
  END DO
C
  ITASK = 2
  END IF
C
  F(1) = F(1) / C(1)
  DO I = 2, N
    F(I) = (F(I) + F(I-1)*A(I)) / C(I)
  END DO
C
  Y(N) = F(N)
  DO I = N-1, 1, -1
    Y(I) = B(I)*Y(I+1) + F(I)
  END DO
  RETURN
  END

```

Назначение дополнительных программ не требует пояснений.

### 6.5.6. Результаты расчетов

В приведенном тексте программы PROBLEM9 решается обратная задача (6.144), (6.145), (6.150), когда ищется правая часть (6.147) с

$$\varphi_1(x_2) = \begin{cases} 1, & 0 < x_2 < 0,5, \\ 0, & 0,5 < x_2 < 1, \end{cases} \quad \varphi_1(x_2) = x_2.$$

Задача решается в единичном квадрате ( $l_1 = l_2 = 1$ ), входные данные для обратной задачи формируются на основе предварительного решения прямой задачи (6.144), (6.145) при заданной правой части.

Приведем вначале результаты решения обратной задачи без возмущения входных данных. Интерес представляют данные по численному решению задачи на последовательности расчетных сеток (рис. 6.18–6.20, с. 262–264). Наблюдается сходимость приближенного решения к точному. Для достижения достаточно высокой точности необходимо использовать подробные сетки.

Большую чувствительность к погрешностям во входных данных демонстрируют результаты расчетов при различных уровнях возмущений в граничных условиях (6.150). Погрешности имитировались обычным образом, например,

$$\tilde{\mu}_1(x_2) = \mu_1(x_2) + 2\delta \left( \sigma(x_2) - \frac{1}{2} \right), \quad x_2 \in \omega_2,$$

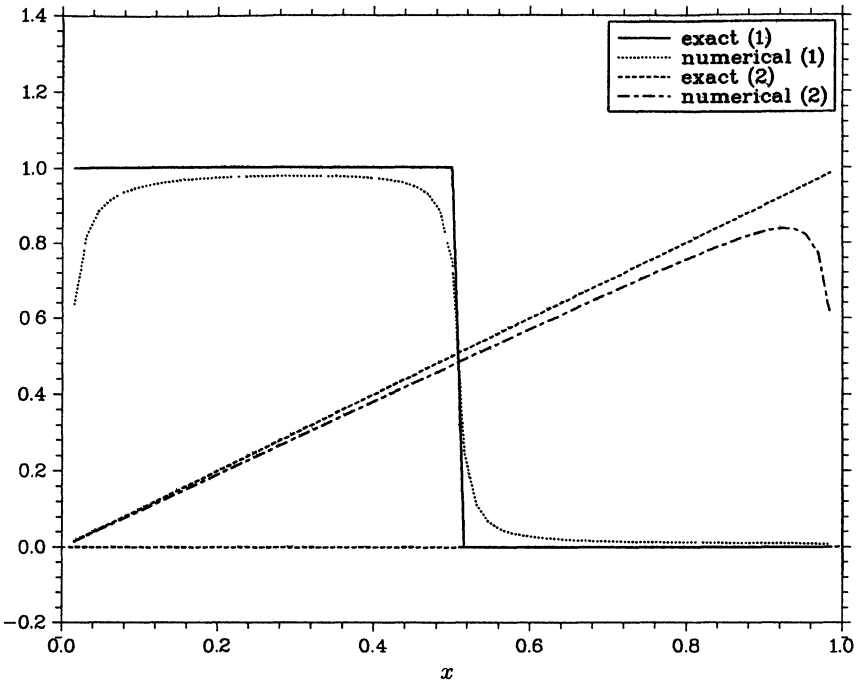


Рис. 6.18. Решение задачи на сетке  $N_1 = N_2 = 65$

где  $\sigma(x_2)$  — случайная функция, нормально распределенная на интервале  $[0, 1]$ , а  $\delta$  задает уровень погрешности. На рис. 6.21 (с. 265) приведен результат решения рассматриваемой обратной задачи при  $\delta = 0,0003$ . Такой уровень соответствует относительной погрешности примерно в 0,1%. Использовалась расчетная сетка  $N_1 = N_2 = 129$ .

## 6.6. Задачи и упражнения

- 6.1.** Сформулируйте условия сходимости приближенного решения, определяемого из (6.16), (6.17), (6.19), к решению задачи (6.14).
- 6.2.** Дайте обоснование итерационного метода (6.26) для приближенного решения задачи (6.14), (6.16).
- 6.3.** Модифицируйте программу PROBLEM5 для решения обратной задачи (6.14), (6.16) итерационным методом (6.26). Проведите сравнительный анализ методов.

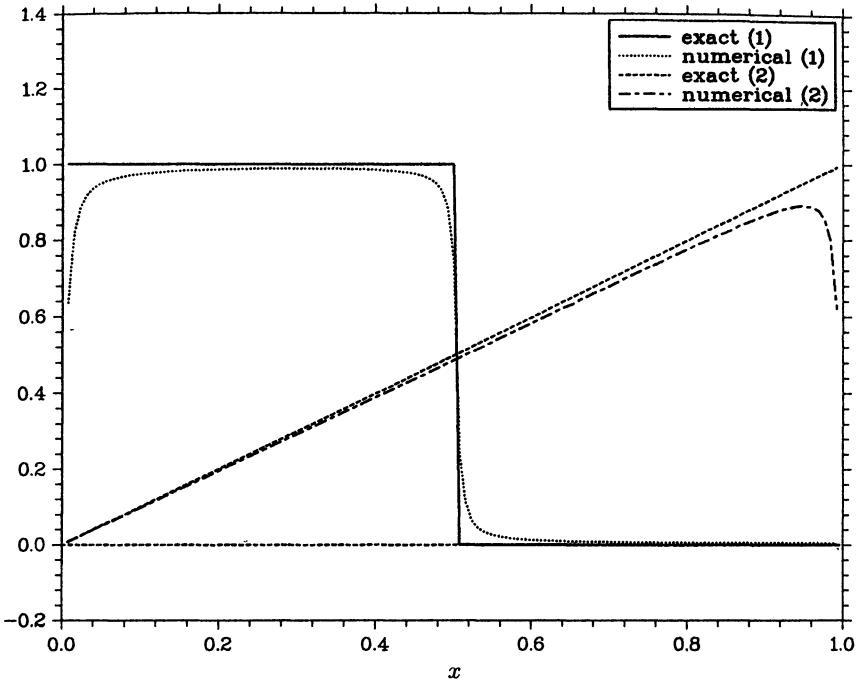


Рис. 6.19. Решение задачи на сетке  $N_1 = N_2 = 129$

**6.4.** Рассмотрите основные особенности применения метода регуляризации А. Н. Тихонова для обратной задачи идентификации правой части параболического уравнения с младшими членами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

по заданной функции  $u(x, t)$ .

**6.5.** Постройте итерационный алгоритм локальной регуляризации при идентификации правой части параболического уравнения (6.45) при приближенно заданном решении краевой задачи (6.45)–(6.47).

**6.6.** С использованием программы PROBLEM6 проведите экспериментальное исследование скорости сходимости приближенного решения обратной задачи в зависимости от точности входных данных.

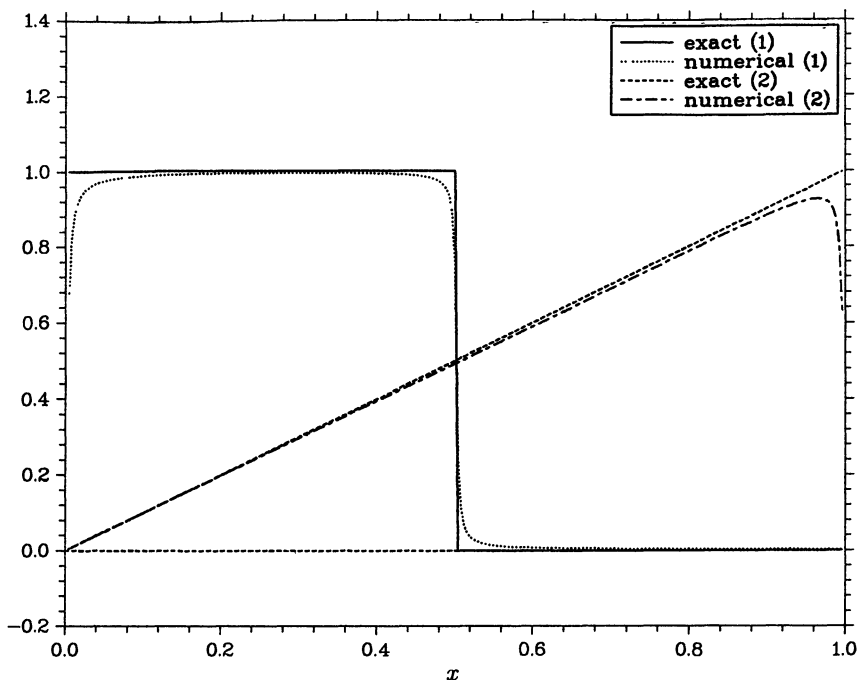


Рис. 6.20. Решение задачи на сетке  $N_1 = N_2 = 257$

**6.7.** Рассмотрите первую краевую задачу для нагруженного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x)u(x^*, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < x^* < l,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l.$$

Сформулируйте условия применимости принципа максимума для этой задачи и на его основе установите единственность решения.

**6.8.** Исследуйте сходимость решения разностной задачи (6.98)–(6.100) к решению дифференциальной задачи (6.94), (6.95)

**6.9.** На основе расчетов на последовательности сгущающихся сеток с использованием программы PROBLEM7 проведите исследование точности восстановления зависимости от времени правой части параболического уравнения (6.84), (6.88) при выполнении условий (6.86), (6.87), (6.89).

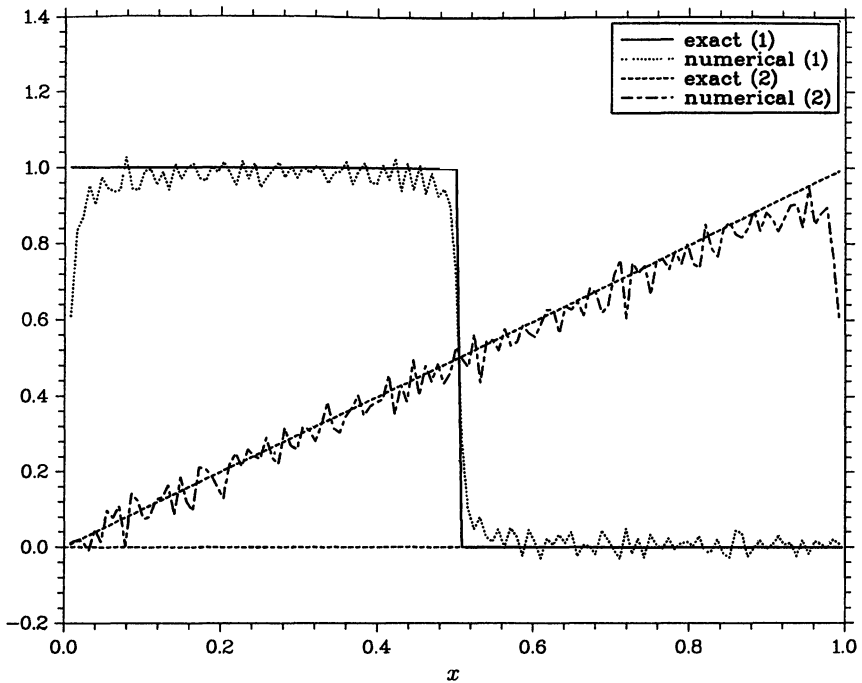


Рис. 6.21. Решение задачи при уровне погрешностей  $\delta = 0,0003$

**6.10.** Исследуйте скорость сходимости разностной схемы (6.127), (6.128) при решении задачи (6.111)–(6.114).

**6.11.** Пусть решается уравнение

$$Ay = f,$$

в котором

$$A = A_0 + A_1, \quad A_0 = A_0^* > 0, \quad A_1 = -A_1^*.$$

Для преобразования исходной задачи применяется симметризация:

$$\tilde{A}y = \tilde{f},$$

причем

$$\tilde{A} = A^* A_0^{-1} A, \quad \tilde{f} = A^* A_0^{-1} f.$$

Используется итерационный метод

$$A_0 \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + \tilde{A}y_k = \tilde{f}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Исследуйте скорость сходимости этого метода при условии, что

$$\|A_1 y\|^2 \leq M(y, A_0 y), \quad M = \text{const} > 0.$$

**6.12.** С использованием программы PROBLEM8 проведите экспериментально исследование сходимости восстанавливаемой правой части в различных нормах.

**6.13.** Рассмотрите обратную задачу (6.144)–(6.146) при условии, что правая часть

$$f(x) = \varphi(x_1^2 + x_2^2).$$

В каком случае решение этой задачи единственно?

**6.14.** Получите априорную оценку для решения сеточной задачи (6.162), (6.163).

**6.15.** Предложите процедуры предварительной обработки зашумленных входных данных при решении обратной задачи идентификации правой части (6.144), (6.145), (6.147), (6.150) для получения более гладкого решения. Для практического исследования их возможностей модифицируйте программу PROBLEM9.

## Глава 7

---

### Эволюционные обратные задачи

В данной главе рассмотрены обратные задачи для нестационарных уравнений математической физики, основная специфика которых обусловлена тем, что не задано состояние системы на начальный момент времени. Наиболее характерным примером задач такого класса выступает задача с обратным временем для параболического уравнения второго порядка. Такие задачи относятся к классу некорректных в классическом смысле и для их приближенного решения применяются в различных вариантах все основные регуляризирующие алгоритмы. Среди них можно выделить вариационные методы, тесно связанные с нелокальным возмущением начальных условий. Второй класс методов характеризуется тем или иным возмущением уравнений, для которого ставится корректная задача — метод квазиобращения. Регуляризирующие алгоритмы решения неустойчивых эволюционных задач строятся с использованием принципа регуляризации — общего методологического принципа получения операторно-разностных схем заданного качества. Большие перспективы имеют итерационные алгоритмы решения эволюционных обратных задач, которые хорошо учитывают специфику рассматриваемых задач и базируются на последовательном решении ряда прямых задач. Рассмотрение ведется на дифференциальном и разностном уровнях, теоретическое рассмотрение подкрепляется результатами решения модельных задач.

#### 7.1. Нелокальное возмущение начальных условий

Рассматривается обратная задача для параболического уравнения с обратным временем. Для ее приближенного решения используется регуляризирующий алгоритм с нелокальным возмущением начального условия. Устанавливается тесная связь данного алгоритма с вариационными методами решения таких некорректных задач.



### 7.1.1. Постановка задачи

В качестве модельной будем рассматривать задачу с обратным временем для одномерного параболического уравнения. Функция  $u(x, t)$ , заданная в прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.1)$$

в котором  $k(x) \geq \kappa > 0$ . Ограничимся рассмотрением краевой задачи с однородными граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (7.3)$$

Задачу (7.1)–(7.3) удобно рассматривать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Для функций, заданных в области  $\Omega = (0, l)$  и обращающихся в нуль в граничных точках (на  $\partial\Omega$ ), определим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ , в котором скалярное произведение определено следующим образом

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx.$$

Для нормы в  $\mathcal{H}$  используются обычные обозначения

$$\|v\| = (v, v)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} v^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

На множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям (7.2), определим оператор

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l. \quad (7.4)$$

Оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряженным и положительно определенным в  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \geq mE, \quad m > 0. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.1), дополненное условиями (7.2) на границе, записывается как дифференциально-операторное уравнение для нахождения  $u(t) \in \mathcal{H}$ :

$$\frac{du}{dt} - \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (7.6)$$

Начальное условие (7.3) дает

$$u(0) = u_0. \quad (7.7)$$

Задача (7.6), (7.7) является некорректной ввиду отсутствия непрерывной зависимости от входных данных (начальных условий).

### 7.1.2. Общие методы решения некорректных эволюционных задач

Для приближенного решения эволюционных обратных задач (7.6), (7.7) могут использоваться в тех или иных вариантах все ранее отмеченные подходы к решению некорректных задач, которые подробно обсуждались нами применительно к решению операторного уравнения первого рода

$$Au = f.$$

Правая часть этого уравнения задана с погрешностью, причем

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta.$$

В методе А. Н. Тихонова приближенное решение  $u_\alpha$  определяется следующим образом:

$$J_\alpha(u_\alpha) = \min_{v \in H} J_\alpha(v), \quad J_\alpha(v) = \|Av - f_\delta\|^2 + \alpha\|v\|^2.$$

Применительно к эволюционной задаче (7.6), (7.7) методу А. Н. Тихонова соответствует решение задачи оптимального управления для уравнения (7.6). Речь в данном случае идет о стартовом управлении и финальном наблюдении.

Соответствующая задача оптимального управления для (7.6), (7.7) может формулироваться следующим образом. Пусть  $v \in \mathcal{H}$  — управление, и ограничений на управление нет. Определим  $u_\alpha = u_\alpha(t; v)$  как решение корректной задачи:

$$\frac{du_\alpha}{dt} - Au_\alpha = f(t), \quad 0 < t < T, \quad (7.8)$$

$$u_\alpha(T; v) = v. \quad (7.9)$$

Квадратичный функционал качества (сглаживающий функционал) возьмем в простейшем виде

$$J_\alpha(v) = \|u_\alpha(0; v) - u_0\|^2 + \alpha\|v\|^2. \quad (7.10)$$

Оптимальное управление  $w$  определяется из условия минимума функционала  $J_\alpha(v)$ :

$$J_\alpha(w) = \min_{v \in H} J_\alpha(v), \quad (7.11)$$

а соответствующее решение  $u_\alpha(t; w)$  задачи (7.8), (7.9) рассматривается как приближенное решение некорректной задачи (7.6), (7.7).

Для приближенного решения вариационной задачи (7.8)–(7.11) используются различные численные методы. В градиентных методах минимизирующая последовательность  $\{v_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , строится по правилу

$$v_{k+1} = v_k + \gamma_k p_k,$$

где  $p_k$  — направление спуска,  $\gamma_k$  — параметр спуска. В простейшем случае направление спуска связывается непосредственно с градиентом функционала (7.10):  $p_k = -\text{grad } J_\alpha(v_k)$ . Нестандартный элемент такого подхода заключается именно в вычислении градиента функционала. Поэтому при решении прикладных обратных задач вариационными методами этому вопросу уделяется повышенное внимание.

В методе А. Н. Тихонова вместо экстремальной задачи можно решать соответствующее уравнение Эйлера. В этом случае приближенное решение определяется из решения уравнения второго рода:

$$A^* A u_\alpha + \alpha u_\alpha = A^* f_\delta.$$

Тем самым переход к корректной задаче осуществляется за счет перехода к задаче с самосопряженным оператором  $A^* A$ , домножая исходное уравнение слева на  $A^*$ , и его последующем возмущении оператором  $\alpha E$ ,  $E$  — единичный оператор.

Рассмотрим класс методов приближенного решения некорректных эволюционных задач типа (7.6), (7.7), которые основаны на переходе к некоторой возмущенной корректной задаче, — методы квазиобращения. Отметим основные используемые варианты метода квазиобращения для задачи (7.6), (7.7), основанные на возмущении исходного уравнения (7.6).

Классический вариант метода квазиобращения связан с определением приближенного решения  $u_\alpha(t)$  задачи (7.6), (7.7) при  $f = 0$  из уравнения

$$\frac{du_\alpha}{dt} - A u_\alpha + \alpha A^* A u_\alpha = 0. \quad (7.12)$$

В классе ограниченных решений устанавливаются регуляризирующие свойства данного варианта метода квазиобращения — сходимость приближенного решения к точному в классе ограниченных решений при соответствующем выборе  $\alpha$ .

Используется также вариант метода квазиобращения для устойчивого решения задачи (7.6), (7.7) с  $A = \mathcal{A}^*$ , основанный на псевдопараболическом возмущении уравнения:

$$\frac{du_\alpha}{dt} - A u_\alpha + \alpha \mathcal{A} \frac{du_\alpha}{dt} = 0. \quad (7.13)$$

При приближенном решении обратных задач математической физики (задача (7.1)–(7.3)) первый вариант метода квазиобращения (см. (7.12)) основан на повышении порядка дифференциального оператора по пространству ( $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  вместо  $\mathcal{A}$ ). Второй вариант метода квазиобращения (см. (7.13)) не связан со столь кардинальным изменением задачи.

Можно отметить и некоторые другие возможности регуляризации задачи за счет дополнительных слагаемых. В контексте общей теории приближенного решения некорректных задач эти варианты примыкают к варианту упрощенной регуляризации, когда в задаче с  $A = A^* \geq 0$  решается уравнение

$$Au_\alpha + \alpha u_\alpha = f_\delta,$$

т. е. можно ограничиться возмущением оператора исходной задачи.

### 7.1.3. Возмущение начальных условий

Важнейший класс приближенных методов решения некорректных эволюционных задач основан не на переходе к некоторому новому уравнению, как в обычном варианте метода квазиобращения, а на возмущении начальных условий. Такой подход может представляться более естественным и оправданным в задачах, в которых именно начальные условия задаются с погрешностью.

В методах с возмущением начальных условий наиболее широко используется экстремальная формулировка задачи. Для соответствующей задачи оптимального управления системами, описываемыми рассматриваемыми эволюционными уравнениями, применяются те или иные методы регуляризации. К рассматриваемому классу методов приближенного решения неустойчивых эволюционных задач относятся и методы с нелокальным возмущением начальных условий. В этом случае регуляризирующий эффект обуславливается связыванием решения на начальный и конечный моменты времени.

Особого внимания заслуживает эквивалентность экстремальной формулировки некорректной эволюционной задачи и нелокальной задачи. Это позволяет рассматривать методы с нелокальным возмущением и экстремальные методы решения эволюционных задач с единых позиций. Кроме того, эквивалентность этих методов позволяет строить вычислительные алгоритмы на основе той или иной формулировки. Например, в некоторых задачах вместо решения соответствующей задачи функциональной минимизации можно использовать простые вычислительные алгоритмы решения нелокальных разностных задач. Можно указать примеры и обратного порядка, когда предпочтительнее строить вычислительный алгоритм на основе экстремальной формулировки.

Для приближенного решения некорректной задачи (7.6), (7.7) (при  $f(t) = 0$ ) применим метод нелокального возмущения начального условия.

Приближенное решение  $u_\alpha(t)$  определим из решения уравнения

$$\frac{du_\alpha}{dt} - \mathcal{A}u_\alpha = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.14)$$

а начальное условие (7.7) заменим на простейшее нелокальное

$$u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T) = u_0. \quad (7.15)$$

Здесь параметр регуляризации  $\alpha > 0$ .

Приведем некоторые оценки для решения нелокальной задачи, принимая во внимание сформулированные выше ограничения на оператор  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* > 0$ ). Прежде всего нас интересует устойчивость приближенного решения  $u_\alpha(t)$  по начальным данным.

Наше рассмотрение базируется на использовании разложения решения по собственным функциям оператора  $\mathcal{A}$ . Не ограничиваясь случаем (7.4), (7.5), через  $\mathcal{A}$  обозначим линейный постоянный (не зависит от  $t$ ) оператор с областью определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , которая плотна в  $\mathcal{H}$ . Предположим, что  $\mathcal{A}$  самосопряжен, положительно определен в  $\mathcal{H}$  и, вообще говоря, неограничен. Будем для простоты считать, что спектр оператора  $\mathcal{A}$  дискретный и состоит из собственных значений  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , а соответствующая система собственных функций  $\{w_k\}$ ,  $w_k \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ортонормирована и полна в  $\mathcal{H}$ . Поэтому для каждого  $v \in \mathcal{H}$  справедливо

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k w_k, \quad v_k = (v, w_k).$$

**Теорема 7.1.** Для решения задачи (7.14), (7.15) справедливы оценки

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u_0\|, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.16)$$

$$\|u_\alpha(T)\| \geq \frac{1}{1 + \alpha} \|u_0\|. \quad (7.17)$$

*Доказательство.* Чтобы показать это, запишем решение задачи (7.14), (7.15) в виде

$$u_\alpha = R(t, \alpha) u_0. \quad (7.18)$$

Для задачи (7.14), (7.15) оператор  $R(t, \alpha)$  записывается следующим образом:

$$R(t, \alpha) = \exp \{ \mathcal{A}t \} (E + \alpha \exp \{ \mathcal{A}T \})^{-1}. \quad (7.19)$$

Решение рассматриваемой нелокальной задачи с учетом (7.18), (7.19) представляется в виде

$$u_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, w_k) \exp \{ \lambda_k t \} (1 + \alpha \exp \{ \lambda_k T \})^{-1} w_k. \quad (7.20)$$

В силу (7.20) имеем

$$\|u_\alpha(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, w_k)^2 \exp\{2\lambda_k t\} (1 + \alpha \exp\{\lambda_k T\})^{-2}.$$

Отсюда с учетом  $\lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , с очевидностью вытекают доказываемые неравенства (7.16), (7.17).  $\blacksquare$

**Замечание 1.** Оценка (7.16) обеспечивает устойчивость решения по начальным данным (оценка сверху), а (7.17) есть оценка решения нелокальной задачи снизу.

**Замечание 2.** Отметим, что оценка снизу (7.17) может быть получена непосредственно из (7.14), (7.15) в предположении, что постоянный оператор  $\mathcal{A}$  не обязательно самосопряженный, но неотрицательный ( $\mathcal{A} \geq 0$ ). Для доказательства домножим уравнение (7.14) скалярно на  $u_\alpha(t)$  и получим естественную для параболического уравнения с обратным временем оценку

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \|u_\alpha(T)\|. \quad (7.21)$$

Принимая во внимание (7.21), из нелокального условия (7.15) следует

$$\|u_0\| = \|u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T)\| \leq \|u_\alpha(0)\| + \alpha \|u_\alpha(T)\| \leq (1 + \alpha) \|u_\alpha(T)\|.$$

Мы показали корректность задачи с нелокальными условиями по времени (7.14), (7.15). Теперь можно остановиться на рассмотрении наиболее принципиального вопроса: в каких условиях решение задачи (7.14), (7.15) дает приближенное решение некорректной задачи (7.6), (7.7) (при  $f(t) = 0$ )?

#### 7.1.4. Сходимость приближенного решения к точному

Сформулируем соответствующий результат о сходимости приближенного решения к точному решению задачи (7.6), (7.7). Пусть теперь начальное условие (7.7) задано с погрешностью

$$\|u_0^\delta - u_0\| \leq \delta. \quad (7.22)$$

Вместо нелокального условия (7.15) рассматривается условие

$$u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T) = u_0^\delta. \quad (7.23)$$

**Теорема 7.2.** Пусть для погрешности начального условия выполнена оценка (7.22). Тогда приближенное решение  $u_\alpha(t)$ , определяемое как решение задачи (7.14), (7.23), при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta/\alpha \rightarrow 0$  сходится к ограниченному в  $\mathcal{H}$  точному решению  $u(t)$  задачи (7.6), (7.7) с  $f(t) = 0$ .

*Доказательство.* В операторном виде приближенное решение  $u_\alpha(t)$ , которое соответствует неточному начальному условию  $u_0^\delta$ , запишем следующим образом

$$u_\alpha(t) = R(t, \alpha)u_0^\delta. \quad (7.24)$$

В такой записи  $R(t, 0)$  определяет точное решение задачи и поэтому  $u(t) = R(t, 0)u_0$ . В соответствии с введенными обозначениями для погрешности  $v$  получим:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\| &= \|R(t, \alpha)(u_0^\delta - u_0) - (R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\| \leq \\ &\leq \|R(t, \alpha)\| \cdot \|u_0^\delta - u_0\| + \|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\|. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Первое слагаемое в (7.25) соответствует устойчивости по начальным данным (ограниченности оператора  $R(t, \alpha)$ ). Второе слагаемое в правой части (7.25) требует близости решения возмущенной задачи при точных входных данных к точному решению  $(R(t, \alpha)u_0$  к  $u(t)$ ). С этой целью и выделяется некоторый класс решений (класс корректности) при использовании регуляризирующего оператора  $R(t, \alpha)$ .

В силу доказанной оценки устойчивости по начальным данным (7.16) и оценки (7.22) имеем

$$\|R(t, \alpha)\| \cdot \|u_0^\delta - u_0\| \leq \frac{1}{\alpha} \delta. \quad (7.26)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (7.25).

Для приближенного решения, определяемого из (7.14), (7.23), с учетом (7.19) получим представление

$$\|u_\alpha(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0^\delta, w_k)^2 \exp\{2\lambda_k t\} (1 + \exp\{\lambda_k T\})^{-2}. \quad (7.27)$$

В силу (7.27) имеем

$$\begin{aligned} \chi(t) &\equiv \|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{2\lambda_k t\} (1 - (1 + \alpha \exp\{\lambda_k T\})^{-1})^2 (u_0, w_k)^2. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Устойчивость рассматривается в классе ограниченных в  $\mathcal{H}$  решений:

$$\|u(t)\| \leq M, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.29)$$

С учетом (7.29) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $r(\varepsilon)$  такое, что

$$\sum_{k=r(\varepsilon)+1}^{\infty} \exp\{2\lambda_k t\} (u_0, w_k)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Поэтому из (7.28) получим

$$\begin{aligned} \chi(t) &\leq \sum_{k=1}^{r(\varepsilon)} \exp\{2\lambda_k t\} (1 - (1 + \alpha \exp\{\lambda_k T\})^{-1})^2 (u_0, w_k)^2 + \\ &+ \sum_{k=r(\varepsilon)+1}^{\infty} \exp\{2\lambda_k t\} (u_0, w_k)^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{r(\varepsilon)} (1 - (1 + \alpha \exp\{\lambda_k T\})^{-1})^2 + \frac{\varepsilon^2}{8}. \end{aligned}$$

Для каждого  $r(\varepsilon)$  можно указать  $\alpha_0$  такое, что при  $\alpha \leq \alpha_0$

$$M^2 \sum_{k=1}^{r(\varepsilon)} (1 - (1 + \alpha \exp\{\lambda_k T\})^{-1})^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Поэтому (7.29) дает

$$\|(\mathbf{R}(t, \alpha) - \mathbf{R}(t, 0))u_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.30)$$

Принимая во внимание (7.26), (7.30), из (7.25) получим оценку

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \delta + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.31)$$

При любом  $\varepsilon > 0$  существует  $\alpha = \alpha(\delta) \leq \alpha_0$  и достаточно малое  $\delta(\varepsilon)$ , при котором  $\delta/\alpha \leq \varepsilon/2$ . Поэтому (7.31) принимает вид

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \varepsilon.$$

Тем самым приближенное решение сходится к точному. ■

Для установления факта сходимости приближенного решения к точному нам достаточно предположить ограниченность решения в  $\mathcal{H}$  (см. (7.29)). При более сильных предположениях о гладкости точного решения можно рассуждать на получение оценок скорости сходимости. Такая ситуация обсуждалась нами подробно при рассмотрении методов устойчивого решения уравнений первого рода. Отметим аналогичные возможности при приближенном решении некорректной задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка (7.6), (7.7).

Естественным сужением класса точных решений задачи (7.6), (7.7) выступает

$$\|Au(t)\| \leq M,$$

или же

$$\|A^2 u(t)\| \leq M$$

для всех  $t \in [0, T]$ . Однако при этом не удается напрямую получить оценку скорости сходимости приближенного решения, определяемого согласно (7.14), (7.23).



В условиях теоремы ограниченность точного решения будем предполагать на удвоенном временном отрезке  $[0, 2T]$ , а сходимость приближенного решения, определяемого из решения нелокальной задачи (7.14), (7.23), рассматривать только при  $t \in [0, T]$ . Пусть априорные условия имеют вид

$$\|u(t)\| \leq M, \quad 0 \leq t \leq 2T. \quad (7.32)$$

В этих условиях (см. (7.28)) имеем

$$\chi(t) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \{2\lambda_k(t+T)\} (1 + \alpha \exp \{\lambda_k T\})^{-2} (u_0, w_k)^2 \leq M^2 \alpha^2.$$

Для погрешности получим явную оценку

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + \alpha M. \quad (7.33)$$

Имеет смысл привести оценки скорости сходимости при менее жестких, чем (7.32), ограничениях на точное решение. Пусть для решения задачи (7.6), (7.7) имеет место

$$\|u(t)\| \leq M, \quad 0 \leq t \leq (1+\theta)T, \quad 0 < \theta \leq 1. \quad (7.34)$$

В условиях (7.34) получим

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp \{2\lambda_k(t+\theta T)\} \times \\ &\times \exp \{2\lambda_k(1-\theta)T\} (1 + \alpha \exp \{\lambda_k T\})^{-2} (u_0, w_k)^2 \leq \\ &\leq M^2 \alpha^2 \max_{1 \leq k < \infty} \exp \{2\lambda_k(1-\theta)T\} (1 + \alpha \exp \{\lambda_k T\})^{-2}. \end{aligned}$$

Обозначим  $\eta = \exp \{\lambda_k T\}$  и рассмотрим максимум функции

$$\varphi(\eta) = \frac{\eta^{(1-\theta)}}{1 + \alpha\eta}, \quad \eta > 0, \quad 0 < \theta \leq 1.$$

Он достигается при

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{1-\theta}{\theta},$$

и равен

$$\varphi(\eta_{\text{opt}}) = \alpha^{\theta-1} \frac{\gamma^{1-\theta}}{1+\gamma}.$$

С учетом этого имеем

$$\chi(t) \leq M^2 \alpha^{2\theta} \frac{\gamma^{2(1-\theta)}}{(1+\gamma)^2},$$

и поэтому при априорных предположениях о точном решении (7.34) для погрешности справедлива оценка

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + \alpha^\theta \frac{\gamma^{1-\theta}}{1+\gamma} M. \quad (7.35)$$

Оценка (7.35) демонстрирует зависимость точности приближенного решения  $u_\alpha(t)$  от гладкости точного решения задачи (7.6), (7.7).

Кратко отметим возможности использования более общих, чем (7.23) нелокальных условий. Пусть, например, вместо (7.23) используются условия

$$u_\alpha(0) + \alpha \mathcal{S}u_\alpha(T) = u_0^\delta. \quad (7.36)$$

На оператор  $\mathcal{S}$  накладывается естественное ограничение самосопряженности и положительности определенности.

Не останавливаясь на формулировании каких-либо общих результатов, отметим особо случай нелокального условия (7.36) с оператором  $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ . В этих условиях нетрудно получить для решения нелокальной задачи (7.14), (7.36) оценку устойчивости в  $\mathcal{H}_D$  следующего вида:

$$\|u_\alpha(t)\|_D \leq \frac{1}{\alpha} \|u_0\|, \quad (7.37)$$

где  $D = \mathcal{A}^2$ . Тем самым устойчивость имеет место при пониженной гладкости начальных условий. В  $\mathcal{H}_D$  доказывается и сходимость приближенного решения к точному (аналог теоремы 7.1) при априорном предположении об ограниченности точного решения в этом же пространстве.

### 7.1.5. Эквивалентность нелокальной задачи и задачи оптимального управления

Остановимся на эквивалентности нелокальной задачи и задачи оптимального управления. Обозначим управление через  $v \in \mathcal{H}$  (ограничения на управление отсутствуют). Определим  $u_\alpha = u_\alpha(t; v)$  как решение корректной задачи

$$\frac{du_\alpha}{dt} - \mathcal{A}u_\alpha = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (7.38)$$

$$u_\alpha(T; v) = v. \quad (7.39)$$

Зададим квадратичный функционал качества (функцию стоимости) в виде

$$J_\alpha(v) = \|u_\alpha(0; v) - u_0^\delta\|^2 + \alpha(\mathcal{S}v, v), \quad (7.40)$$

где  $\mathcal{S}$  — самосопряженный положительно определенный оператор. Выбор (7.40) соответствует стартовому наблюдению. Оптимальное управление  $w$

доставляет минимум функционалу  $J_\alpha(v)$ :

$$J_\alpha(w) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha(v), \quad (7.41)$$

а соответствующее решение  $u_\alpha(t; w)$  задачи (7.38), (7.39) рассматривается как приближенное решение некорректной задачи (7.6), (7.7) ( $f(t) = 0$ ).

Покажем, что нелокальная задача (7.14), (7.36) при некоторых условиях есть уравнение Эйлера для функционала (7.40) на множестве ограничений, определяемых (7.38), (7.39). С этой целью удобно ввести сопряженное состояние. Введем обозначение

$$(u, p)^* = \int_0^T (u, p) dt.$$

Для уравнения (7.38) с учетом самосопряженности оператора  $\mathcal{A}$  имеем

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{dy}{dt} - \mathcal{A}y \right), p \right)^* &= \left( \frac{dy}{dt}, p \right)^* - (y, \mathcal{A}p)^* = \\ &= (y(T), p(T)) - (y(0), p(0)) - \left( y, \frac{dp}{dt} \right)^* - (y, \mathcal{A}p)^*. \end{aligned} \quad (7.42)$$

С учетом (7.42) будем считать, что  $p(t)$  определяется из уравнения

$$\frac{dp}{dt} + \mathcal{A}p = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.43)$$

Начальное условие для (7.43) выбирается ниже.

Для рассматриваемого оптимального управления  $w$  справедливо уравнение Эйлера

$$(u_\alpha(0; w) - u_0^\delta, u_\alpha(0; v) - u_\alpha(0; w)) + \alpha(Sw, v - w) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (7.44)$$

Принимая во внимание равенство

$$(u_\alpha(T; v), p(T)) = (u_\alpha(0; v), p(0)),$$

которое следует из (7.38), (7.42), (7.43), и полагая

$$p(0) = u_\alpha(0) - u_0^\delta, \quad (7.45)$$

где  $u_\alpha(t) = u_\alpha(t; w)$ , из (7.44) получим

$$(p(T) + \alpha Sw, v - w) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Отсюда вытекает

$$p(T) + \alpha S u_\alpha(T) = 0. \quad (7.46)$$

Равенство (7.46) хорошо известно в теории управления параболическими уравнениями.

Таким образом, задача отыскания оптимального управления  $w$  и соответствующего ему решения  $u_\alpha(t)$  свелась к решению системы уравнений (7.38), (7.43) со связанными условиями (7.45), (7.46).

Для постоянного оператора  $S$ , который перестановочен с оператором  $A$ , имеет место равенство

$$p(T - \theta) + \alpha S u_\alpha(T + \theta) = 0 \quad (7.47)$$

с постоянной  $\theta$ , где  $p(t)$  и  $u_\alpha(t)$  удовлетворяют уравнениям (7.43) и (7.14) соответственно, а при  $t = T$  связаны соотношениями (7.46).

Действительно, полагая  $g(t) = -\alpha S u_\alpha(t)$ , перепишем (7.46) в виде

$$p(T) = g(T). \quad (7.48)$$

Для  $S \neq S(t)$  и  $SA = AS$  функция  $g(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dg}{dt} - Ag = 0. \quad (7.49)$$

Уравнение (7.49) совпадает с уравнением (7.43) для  $p(t)$  при замене знака у переменной  $t$ . Принимая во внимание равенство (7.48), получим

$$p(T - \theta) = g(T + \theta)$$

для любого  $\theta$ . Отсюда и следует доказываемая связь (7.47) решений сопряженного уравнения (7.43) и решения задачи оптимального управления.

Полагая в (7.47)  $\theta = T$ , придем к равенству

$$p(0) + \alpha S u(2T) = 0,$$

которое с учетом начального условия (7.45) принимает вид

$$u_\alpha(0) + \alpha S u_\alpha(2T) = u_0^\delta. \quad (7.50)$$

Тем самым исключается вспомогательная функция  $p(t)$ , которая определяет сопряженное состояние, и мы приходим к нелокальному условию для приближенного решения. Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 7.3.** Пусть самосопряженные, постоянные и положительно определенные операторы  $S$  и  $A$  перестановочны друг с другом. Тогда решение вариационной задачи (7.38)–(7.41) удовлетворяет уравнению

$$\frac{du_\alpha}{dt} - Au_\alpha = 0, \quad 0 < t \leq 2T, \quad (7.51)$$

и нелокальному условию (7.50).

Уравнения (7.50), (7.51) есть уравнения Эйлера для вариационной задачи (7.38)–(7.41). Установленная связь нелокальной задачи и задачи оптимального управления представляется чрезвычайно важной и полезной. В пользу этого утверждения достаточно повторить аналогичные соображения относительно уравнений Эйлера для классических вариационных задач.

При рассмотрении некорректных эволюционных задач типа (7.6), (7.7) мы показали фактическую эквивалентность двух различных подходов к нахождению приближенного решения. Методы, которые основаны, во-первых, на нелокальном возмущении начальных условий и, во-вторых, на использовании экстремальной формулировки задачи, порождают одни и те же регуляризирующие алгоритмы. Принципиальное различие этих подходов проявляется лишь в способе нахождения приближенного решения — в вычислительной реализации.

### 7.1.6. Разностные нелокальные задачи

Покажем, что при определенных условиях для разностных аналогов нелокальной задачи (7.14), (7.15) имеют место утверждения, аналогичные теоремам 7.1 и 7.3. Здесь мы ограничимся рассмотрением аппроксимаций по времени. Оператор  $\mathcal{A}$  аппроксимируется стандартным образом разностным оператором, самосопряженным и положительным в соответствующем сеточном пространстве. По переменной  $t$  вводится равномерная сетка

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\}$$

с шагом  $\tau > 0$ . Приближенное решение нелокальной задачи (7.14), (7.15) на момент времени  $t = t_n$  обозначим, как обычно,  $y_n$ . Для его определения используем простейшую явную схему, которая для неустойчивых задач чаще является более предпочтительной, чем неявные. Из (7.14), (7.15) имеем

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \mathcal{A}y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.52)$$

$$y_0 + \alpha y_{N_0} = u_0. \quad (7.53)$$

Для решения разностного уравнения (7.52) имеет место представление

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \tau \lambda_k)^n (y_0, w_k) w_k, \quad n = 0, 1, \dots, N_0. \quad (7.54)$$

Исходя из (7.54) нетрудно установить следующий прямой аналог теоремы 7.1.

**Теорема 7.4.** Для решения разностной нелокальной операторно-разностной задачи (7.52), (7.53) справедливы оценки

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u_0\|, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad (7.55)$$

$$\|y_{N_0}\| \geq \frac{1}{1 + \alpha} \|u_0\|. \quad (7.56)$$

*Доказательство.* Из (7.53), (7.54) следует представление для решения нелокальной задачи (7.52), (7.53):

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \tau \lambda_k)^n (1 + \alpha(1 + \tau \lambda_k)^{N_0})^{-1} (u_0, w_k) w_k. \quad (7.57)$$

Для нормы в  $\mathcal{H}$  из (7.57) следует

$$\|y_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \tau \lambda_k)^{2n} (1 + \alpha(1 + \tau \lambda_k)^{N_0})^{-2} (u_0, w_k)^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} \|u_0\|^2,$$

так как  $\lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тем самым доказана оценка (7.55).

Оценка снизу (7.56) по аналогии с непрерывным случаем (см. теорему 7.1) может быть доказана в более общих предположениях относительно оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть  $\mathcal{A} \geq 0$ , тогда, домножая разностное уравнение (7.52) скалярно в  $\mathcal{H}$  на  $y_n$ , получим

$$(y_{n+1}, y_n) = \|y_n\|^2 + \tau (\mathcal{A} y_n, y_n) \geq \|y_n\|^2. \quad (7.58)$$

Для левой части (7.58) имеем

$$(y_{n+1}, y_n) \leq \|y_{n+1}\| \cdot \|y_n\|,$$

и поэтому

$$\|y_n\| \leq \|y_{n+1}\| \leq \dots \leq \|y_{N_0}\|. \quad (7.59)$$

Неравенство (7.59) является сеточным аналогом неравенства (7.21). Принимая во внимание нелокальное условие (7.53), с учетом (7.59) получим

$$\|u_0\| = \|y_0 + \alpha y_{N_0}\| \leq \|y_0\| + \alpha \|y_{N_0}\| \leq (1 + \alpha) \|y_{N_0}\|,$$

что и дает оценку (7.56). ■

Специально отметим, что при использовании явной схемы (7.52) оценки разностного решения получены без каких-либо ограничений на временной шаг. В то же самое время лишь условная устойчивость имеет место при использовании схем с весами.

Рассмотрим теперь разностную задачу, которая соответствует задаче оптимального управления (7.38)–(7.40). Приближенное решение на момент времени  $t_n$  при управлении  $v$  обозначим  $y_n(v)$  и  $y_n = y_n(v)$  соответственно.

Задаче (7.38), (7.39) поставим в соответствие разностную задачу

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \mathcal{A}y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.60)$$

$$y_{N_0}(v) = v. \quad (7.61)$$

Функционал качества в соответствии с (7.40) имеет вид

$$J_\alpha(v) = \|y_0(v) - u_0\|^2 + \alpha(\mathcal{S}v, v) \quad (7.62)$$

с некоторым положительным и самосопряженным оператором  $\mathcal{S}$ . Оптимальное управление  $w$  определяется условием

$$J_\alpha(w) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha(v). \quad (7.63)$$

Для формулировки сопряженной задачи получим разностный аналог тождества (7.42). Для этого удобно рассмотреть расширенную на один узел сетку

$$\bar{\omega}_\tau^\pm = \{t_n = n\tau, \quad n = -1, 0, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\}.$$

Используем следующие обозначения теории разностных схем. Пусть на расширенной сетке

$$\{y, v\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} y_n v_n \tau, \quad \{y, v\} = \sum_{n=0}^{N_0} y_n v_n \tau, \quad [y, v] = \sum_{n=-1}^{N_0-1} y_n v_n \tau.$$

Разностные формулы суммирования по частям дают равенство

$$\{y, v_i\} + [y_t, v] = y_{N_0} v_{N_0} - y_{-1} v_{-1}, \quad (7.64)$$

где, напомним,

$$y_i = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}, \quad y_t = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}.$$

Используя (7.64) и очевидное тождество

$$\{y, v\} - [y, v] = y_{N_0} v_{N_0} \tau - y_{-1} v_{-1} \tau,$$

получим

$$\begin{aligned} & \{y, p_i + \mathcal{A}p\} + [y + t - \mathcal{A}y, p] = \\ & = y_{N_0}(p_{N_0} + \tau \mathcal{A}p_{N_0}) - p_{-1}(y_{-1} + \tau \mathcal{A}y_{-1}). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Равенство (7.65) выступает в качестве сеточного аналога равенства (7.42). По аналогии с непрерывной задачей сопряженное состояние будем с учетом (7.65) определять из разностного уравнения

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{\tau} + \mathcal{A}p_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0. \quad (7.66)$$

Тогда в силу (7.65) будем иметь равенство

$$y_{N_0}(p_{N_0} + \tau A p_{N_0}) = p_{-1}(y_{-1} + \tau A y_{-1}). \quad (7.67)$$

Из (7.66) непосредственно следует

$$p_{N_0} + \tau A p_{N_0} = p_{N_0-1}. \quad (7.68)$$

Будем считать, что разностное уравнение (7.60) справедливо и при  $n = -1$ . Тогда получим

$$y_{-1} + \tau A y_{-1} = y_0. \quad (7.69)$$

С учетом (7.68), (7.69) равенство (7.67) записывается в виде

$$y_{N_0} p_{N_0-1} = y_0 p_{-1}. \quad (7.70)$$

Для функционала (7.62) имеем (см. (7.44))

$$(y_0(w) - u_0, y_0(v) - y(w)) + \alpha(Sw, v - w) \quad (7.71)$$

для  $\forall v \in \mathcal{H}$ . Выберем теперь

$$p_{-1} = y_0(w) - u_0, \quad (7.72)$$

тогда с учетом (7.70) из (7.71) следует

$$p_{N_0-1} + \alpha S y_{N_0} = 0. \quad (7.73)$$

Пусть постоянный оператор  $S$  перестановочен с оператором  $A$ . Тогда для любого целого  $m$  справедливо равенство

$$p_{N_0-1-m} + \alpha S y_{N_0+m} = 0, \quad (7.74)$$

при условии, что  $p_n$  и  $y_n$  удовлетворяют уравнениям (7.66) и (7.60) соответственно и связаны соотношениями (7.73). Доказательство данного утверждения проводится аналогично непрерывному случаю (см. (7.47)).

Для того чтобы перейти к нелокальной задаче, положим в (7.74)  $m = N_0$  и, принимая во внимание (7.72), приходим к условию

$$y_0 + \alpha S y_{2N_0} = u_0. \quad (7.75)$$

Это позволяет нам сформулировать следующий результат.

**Теорема 7.5.** Пусть самосопряженные, постоянные и положительно определенные операторы  $S$  и  $A$  перестановочны друг с другом. Тогда решение разностной задачи оптимального управления (7.60)–(7.63) удовлетворяет уравнению

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - A y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 2N_0 - 1, \quad (7.76)$$

дополненному нелокальным условием (7.75).



Таким образом, и для разностной задачи оптимального управления установлена связь с задачами с нелокальными условиями по времени на удвоенном временном интервале. Указанная связь между нелокальными задачами и задачами оптимального управления получена в предположениях, что исходный оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен, постоянен и положительно определен в  $\mathcal{H}$ . Такие ограничения не связаны с существом задачи, и для более общих задач оптимального управления аналогично строится уравнение Эйлера в виде нелокальной задачи.

### 7.1.7. Программная реализация

При использовании методов с нелокальным возмущением начальных условий есть проблема вычислительной реализации таких регуляризирующих алгоритмов. Необходимо отметить, что в настоящее время отсутствуют простые и удобные вычислительные схемы для численного решения общих нелокальных краевых задач для уравнений математической физики. Для того чтобы вычислительные сложности реализации не заслоняли существо рассматриваемой проблемы, будем рассматривать простейшую обратную задачу для одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами. Решение сеточной задачи строится с использованием метода разделения переменных при применении методов быстрого преобразования Фурье.

В рамках квазиреального эксперимента сначала решается прямая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Решение этой задачи на конечный момент времени ( $u(x, T)$ ) возмущается и эта функция используется в качестве входных данных при решении обратной задачи по восстановлению решения на начальный момент времени  $t = 0$ .

Реализация базируется на быстром преобразовании Фурье (подпрограммы SINT и SINTI). Более подробное описание приведено выше (программа PROBLEM9).

Выбор параметра регуляризации проводился по невязке. Вычислительная реализация основана на использовании последовательности

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0,$$

с заданными начальным значением  $\alpha_0$  и множителем  $q$ .

## Программа PROBLEM10

```

C
C   PROBLEM10 - ЗАДАЧА С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ
C               ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               НЕЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ
C
C   PARAMETER ( DELTA = 0.005, N = 65, M = 65 )
C   DIMENSION UO(N), UT(N), UTD(N), UT1(N), U(N), U1(N),
+           X(N), ALAM(N-2), W(N-2), W1(N-2), WSAVE(4*N)
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR      - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   N           - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TMAX        - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C   M           - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA       - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   Q           - МНОЖИТЕЛЬ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ;
C   UO(N)       - ВОССТАНАВЛИВАЕМОЕ НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ;
C   UT(N)       - РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ;
C   UTD(N)      - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ;
C   U(N)        - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   XL = 0.
C   XR = 1.
C   TMAX = 0.1
C   PI  = 3.1415926
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H = (XR - XL) / (N - 1)
C   TAU = TMAX / (M-1)
C   DO I = 1, N
C       X(I) = XL + (I-1)*H
C   END DO
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
C   DO I = 1, N
C       UO(I) = AU(X(I))
C   END DO
C
C   СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СЕТОЧНОГО ОПЕРАТОРА
C
C   DO I = 1, N-2
C       ALAM(I) = 4./H**2*(SIN(PI*I/(2.*(N-1))))**2
C   END DO
C
C   ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

```

```

C
CALL SINTI( N-2, WSAVE )
DO I = 2, N-1
  W(I-1) = U0(I)
END DO
CALL SINT( N-2, W, WSAVE )

C
C   ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C
DO I = 1, N-2
  QQ = 1. / (1. + TAU*ALAM(I))
  W1(I) = QQ**(M-1) * W(I)
END DO
CALL SINT( N-2, W1, WSAVE )
DO I = 2, N-1
  UT(I) = 1./(2.*(N-1))*W1(I-1)
END DO
UT(1) = 0.
UT(N) = 0.
DO I = 1, N-2
  QQ = 1. / (1. + TAU*ALAM(I))
  W1(I) = QQ**((M-1)/2) * W(I)
END DO
CALL SINT( N-2, W1, WSAVE )
DO I = 2, N-1
  UT1(I) = 1./(2.*(N-1))*W1(I-1)
END DO
UT1(1) = 0.
UT1(N) = 0.

C
C   ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
DO I = 2, N-1
  UTD(I) = UT(I) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
END DO
UTD(1) = 0.
UTD(N) = 0.

C
C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C   ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВХОДНЫХ ДАННЫХ
C
DO I = 2, N-1
  W(I-1) = UTD(I)
END DO
CALL SINT( N-2, W, WSAVE )

C
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПО ПОДБОРУ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C
IT = 0
ITMAX = 1000
ALPHA = 0.001
Q = 0.75

```

```

100 IT = IT + 1
C
C   ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C
DO I = 1, N-2
  QQ = 1. + TAU*ALAM(I)
  W1(I) = W(I) / (1. + ALPHA*QQ**(M-1))
END DO
CALL SINT( N-2, W1, WSAVE )
DO I = 2, N-1
  U(I) = 1./(2.*(N-1))*W1(I-1)
END DO
C
C   НЕВЯЗКА
C
SUM = 0.DO
DO I = 2,N-1
  SUM = SUM + (U(I)-UTD(I))*2*H
END DO
SL2 = SQRT(SUM)
C
IF (IT.EQ.1) THEN
  IND = 0
  IF (SL2.LT.DELTA) THEN
    IND = 1
    Q = 1.DO/Q
    END IF
    ALPHA = ALPHA*Q
    GO TO 100
  ELSE
    ALPHA = ALPHA*Q
    IF (IND.EQ.0 .AND. SL2.GT.DELTA) GO TO 100
    IF (IND.EQ.1 .AND. SL2.LT.DELTA) GO TO 100
  END IF
C
C   РЕШЕНИЕ
C
DO I = 1, N-2
  QQ = 1. + TAU*ALAM(I)
  W1(I) = QQ**((M-1)/2) * W(I) / (1. + ALPHA*QQ**(M-1))
+   * QQ**((M-1)/2)
END DO
CALL SINT( N-2, W1, WSAVE )
DO I = 2, N-1
  U(I) = 1./(2.*(N-1))*W1(I-1)
END DO
U(1) = 0.
U(N) = 0.
DO I = 1, N-2
  QQ = 1. + TAU*ALAM(I)
  W1(I) = QQ**((M-1)/2) * W(I) / (1. + ALPHA*QQ**(M-1))
END DO
CALL SINT( N-2, W1, WSAVE )

```

```

DO I = 2, N-1
  U1(I) = 1./(2.*(N-1))*W1(I-1)
END DO
U1(1) = 0.
U1(N) = 0.
C
WRITE ( 01, * ) (U0(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (UT(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (UT1(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (UTD(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (U(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (U1(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (X(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) IT, ALPHA
CLOSE ( 01 )
STOP END

FUNCTION AU ( X )
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
AU = X / 0.3
IF (X.GT.0.3) AU = (1. - X) / 0.7
C
RETURN
END

```

Задание начального условия проводится в подпрограмме AU. С учетом рассмотрения вопросов сходимости приближенное решение вычисляется на конечный момент времени ( $t = T$ ) и на момент времени  $t = T/2$ .

### 7.1.8. Результаты расчетов

Решалась модельная задача, входные данные для которой соответствовали разностному решению прямой задачи ( $l = 1, t = 0, 1$ ) с начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{0,3}, & 0 < x \leq 0,3, \\ \frac{1-x}{0,7}, & 0,3 < x < 1. \end{cases}$$

Расчеты выполнены на равномерной сетке с  $h = 1/64$ ,  $\tau = 1/640$ . Результаты решения прямой задачи показаны на рис. 7.1.

Влияние погрешностей моделировалось за счет возмущения входных данных (решение прямой задачи на момент времени  $t = T$ ):

$$\tilde{u}(x, T) = u(x, T) + 2\delta \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \right), \quad x \in \omega,$$

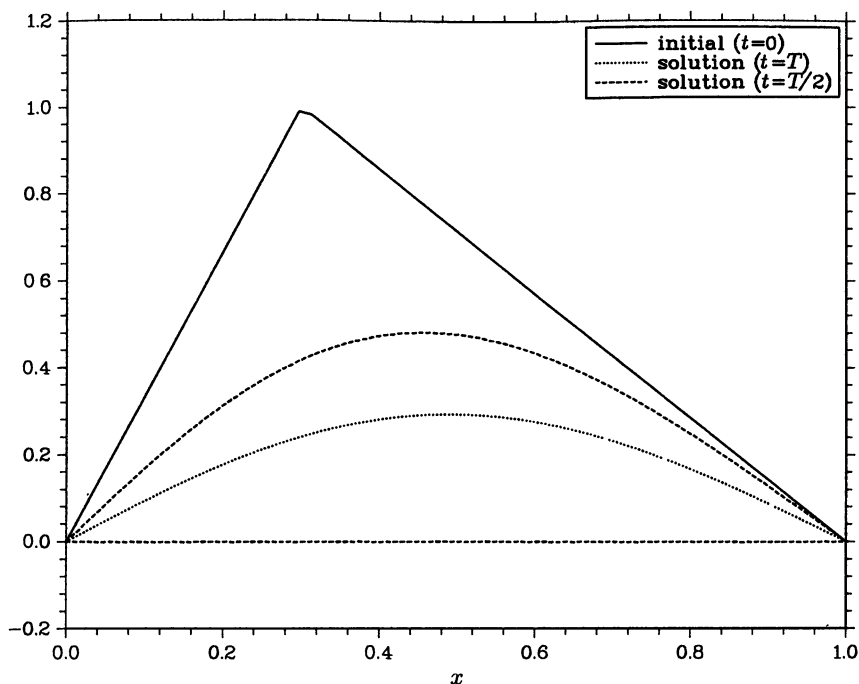


Рис. 7.1. Сеточное решение прямой задачи

где  $\sigma(x)$  — случайная функция, нормально распределенная на интервале  $[0, 1]$ . На рис. 7.2 (с. 290) представлены точное и приближенное решения обратной задачи на два характерных момента времени:  $t = T$  и  $t = T/2$  при  $\delta = 0,005$ . Аналогичные данные при большем ( $\delta = 0,015$ ) и меньшем ( $\delta = 0,0025$ ) показаны на рис. 7.3 и 7.4 (с. 291, 292) соответственно.

Приведенные данные демонстрируют существенную зависимость точности восстановления решения от момента времени. Решение на конечный момент времени восстанавливается плохо, сходимость при уменьшении погрешности во входных данных наблюдается слабо. Значительно более благоприятная ситуация имеет место при  $t = T/2$ . Именно до этого момента, как показано выше при теоретическом исследовании проблемы, скорость сходимости приближенного решения к точному максимальна.

## 7.2. Регуляризованные разностные схемы

Важный класс методов решения некорректных эволюционных задач связан с возмущением исходного уравнения. В методе квазиобращения

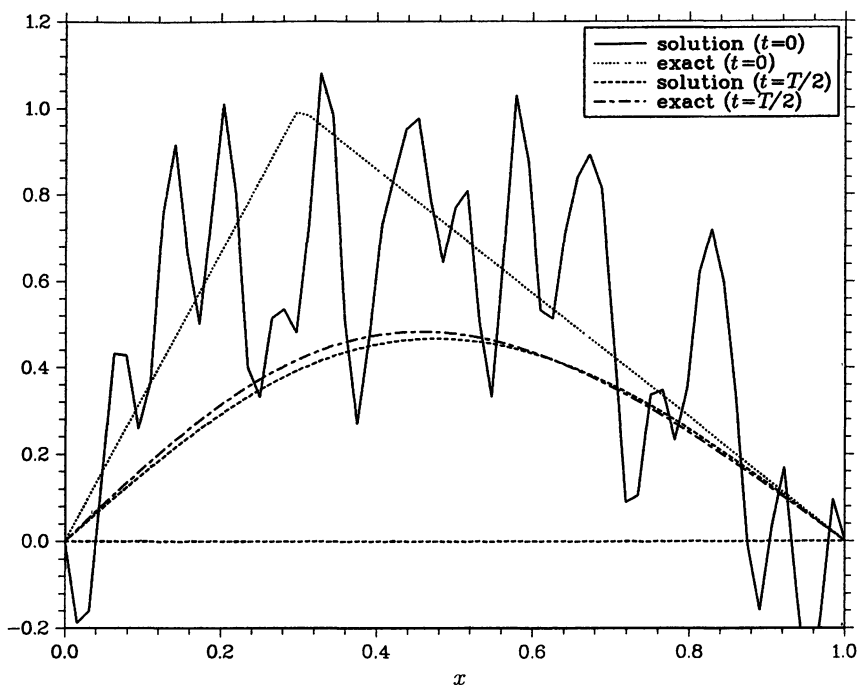


Рис. 7.2. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$

такое возмущение может проводиться для исходной дифференциальной задачи. Более естественный подход исключает рассмотрение вспомогательной дифференциальной задачи и базируется на возмущении сеточной задачи. На этом пути строятся регуляризованные разностные схемы.

### 7.2.1. Принцип регуляризации разностных схем

В настоящее время принцип регуляризации разностных схем рассматривается как основной методологический принцип улучшения разностных схем. Для общих двух- и трехслойных схем формулируются рецепты улучшения качества (устойчивости, точности, экономичности) разностных схем. На его основе проводится исследование устойчивости и сходимости широкого класса разностных схем для краевых задач математической физики, строятся итерационные алгоритмы решения сеточных задач.

Принцип регуляризации разностных схем традиционно широко используется для построения устойчивых разностных схем при численном решении корректных задач для уравнений с частными производными. На такой единой методологической основе строятся также разностные

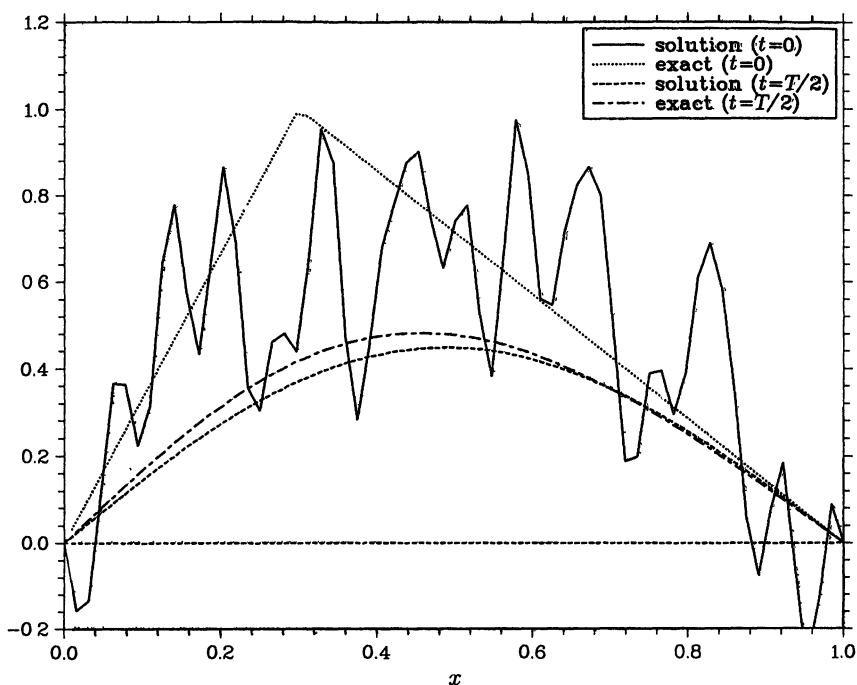


Рис. 7.3. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

схемы для условно корректных нестационарных задач математической физики. За счет малых возмущений операторов задачи удается контролировать рост нормы решения при переходе с одного временного слоя на другой.

Построение безусловно устойчивых разностных схем на основе принципа регуляризации реализуется следующим образом:

1. Для исходной задачи строится какая-то простейшая разностная схема (производящая разностная схема), не обладающая необходимыми свойствами, т. е. схема является условно устойчивой, либо даже абсолютно неустойчивой.
2. Разностная схема записывается в единой (канонической) форме, для которой условия устойчивости известны.
3. Качество разностной схемы (ее устойчивость) улучшается за счет возмущения операторов разностной схемы.

Тем самым принцип регуляризации разностных схем базируется на использовании уже известных результатов об условиях устойчивости. Такие критерии дает общая теория устойчивости разностных схем.



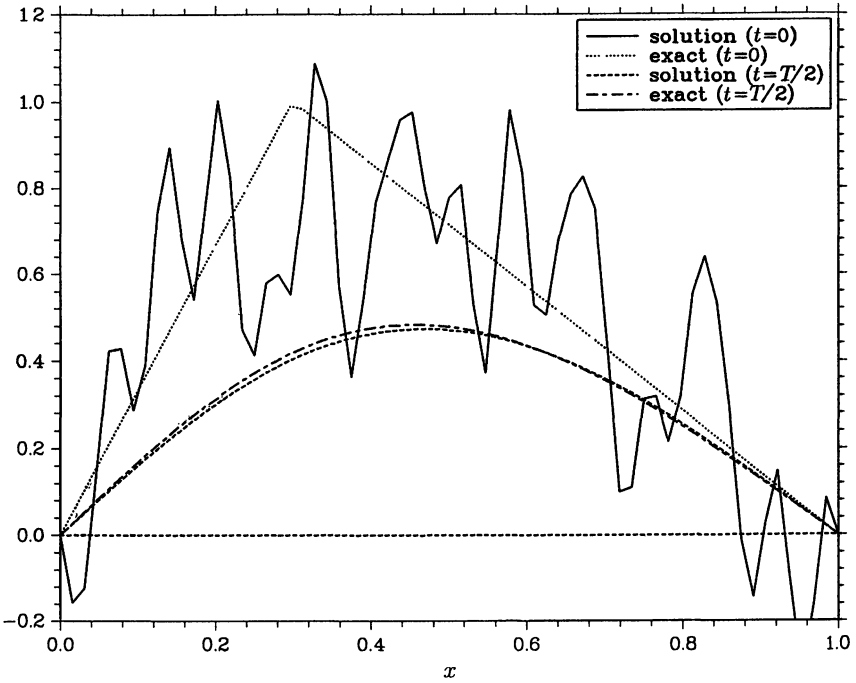


Рис. 7.4. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,0025$

С этой точки зрения мы можем рассматривать принцип регуляризации как элемент конструктивного использования общих результатов теории устойчивости разностных схем. Это достигается за счет записи разностных схем в достаточно общей канонической форме и формулировкой критериев устойчивости, удобных для проверки.

Для иллюстрации больших возможностей, которые предоставляет принцип регуляризации разностных схем, будем использовать этот общий подход для построения безусловно устойчивых схем для прямых задач математической физики. Модельной задачей может рассматриваться первая краевая задача для параболического уравнения. В качестве производящей берется условно устойчивая явная схема. Для получения абсолютно устойчивой схемы возмущаются операторы явной разностной схемы. Отдельно выделены варианты аддитивного (стандартного) и мультипликативного (нестандартного) возмущения операторов производящей разностной схемы.

Рассмотрим двумерную задачу в прямоугольнике

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

В  $\Omega$  ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.77)$$

дополненного простейшими однородными граничными условиями первого рода:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T. \quad (7.78)$$

Задается также начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (7.79)$$

Будем считать, что коэффициент  $k$  уравнения (7.77) достаточно гладкий и  $k(x) \geq \kappa$ ,  $\kappa > 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (7.77)–(7.79) дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству. Будем считать для простоты, что в области  $\Omega$  введена равномерная по каждому направлению сетка с шагами  $h_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Пусть, как обычно,  $\omega$  — множество внутренних узлов.

На множестве сеточных функций  $y(x)$  таких, что  $y(x) = 0$ ,  $x \notin \omega$ , определим сеточный оператор  $\Lambda$  соотношением

$$\Lambda y = - \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \quad (7.80)$$

положив, например,

$$a_1(x) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2),$$

$$a_2(x) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2).$$

В сеточном гильбертовом пространстве  $H = L_2(\omega)$  скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x) w(x) h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

В  $H$  имеем  $\Lambda = \Lambda^* \geq mE$ ,  $m > 0$ . От (7.77)–(7.79) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = 0, \quad 0 < t < T, \quad (7.81)$$

при заданном

$$y(0) = u_0, \quad x \in \omega. \quad (7.82)$$

Будем строить безусловно устойчивые двухслойные разностные схемы для (7.81), (7.82) на основе принципа регуляризации.

В соответствии с принципом регуляризации выберем вначале какую-нибудь разностную схему, от которой мы и будем отталкиваться. В качестве такой производящей схемы естественно рассмотреть простейшую явную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.83)$$

$$y_0 = u_0, \quad x \in \omega, \quad (7.84)$$

где  $N_0\tau = T$ .

Запишем разностную схему (7.83), (7.84) в канонической форме двухслойных операторно-разностных схем

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad (7.85)$$

с операторами

$$B = E, \quad A = \Lambda.$$

В соответствии с теоремой 4.1 условие

$$B \geq \frac{\tau}{2} A, \quad (7.86)$$

необходимо и достаточно для устойчивости схемы (7.84), (7.85) в  $H_A$ , т. е. для выполнения оценки

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|u_0\|_A.$$

С учетом неравенства  $\Lambda \leq \|\Lambda\|E$  из необходимых и достаточных условий устойчивости (7.86) получим следующие ограничения на шаг по времени для явной схемы (7.83), (7.84)

$$\tau \leq \frac{2}{\|\Lambda\|}.$$

В нашем случае  $\|\Lambda\| = O(|h|^{-2})$ , где  $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$ , и максимально допустимый шаг  $\tau_0 = O(|h|^2)$ .

В соответствии с (7.86) повышение устойчивости может достигаться двояко. В первом случае — за счет увеличения энергии  $(By, y)$  оператора  $B$  (левой части неравенства (7.86)) или же за счет уменьшения энергии оператора  $A$  (правой части неравенства (7.86)). Рассмотрим вначале возможности, связанные с добавлением операторных слагаемых в операторы  $B$  и  $A$ . В этом случае будем говорить об аддитивной регуляризации.

Наиболее естественно начать с аддитивного возмущения оператора  $B$ , т. е. с перехода  $B \mapsto B + \alpha R$ , где  $R$  — регуляризирующий

оператор, а  $\alpha$  — параметр регуляризации. Принимая во внимание, что для нашей производящей схемы  $B = E$ , положим

$$B = E + \alpha R. \quad (7.87)$$

Для того чтобы сохранить первый порядок аппроксимации в схеме (7.85), (7.87), достаточно выбрать  $\alpha = O(\tau)$ .

В качестве характерных рассмотрим два способа выбора регуляризующего оператора:

$$R = \Lambda, \quad (7.88)$$

$$R = \Lambda^2. \quad (7.89)$$

Непосредственно устанавливается, что регуляризованная разностная схема (7.85), (7.87) устойчива в  $H_A$  при  $\alpha \geq \tau/2$  в случае (7.88) и  $\alpha \geq \tau^2/16$  при (7.89).

Регуляризованная схема (7.85), (7.87), (7.88) соответствует использованию стандартной схемы с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

при выборе  $\alpha = \sigma\tau$ .

Стандартный подход к построению устойчивых схем базируется на основе использования аддитивной регуляризации. Вторая возможность связана с мультипликативным возмущением сеточных операторов производящей схемы. Рассмотрим некоторые простейшие примеры использования такого подхода, часть из которых можно рассматривать как новую интерпретацию уже рассмотренных выше регуляризованных схем.

При мультипликативной регуляризации оператора  $B$  произведем, например, замену  $B \mapsto B(1 + \alpha R)$  или  $B \mapsto (1 + \alpha R)B$ . При таком возмущении мы остаемся в классе схем с самосопряженными операторами, если  $R = R^*$ . При этом мы имеем регуляризованную схему (7.85), (7.87), которая исследовалась выше.

Пример более сложной регуляризации дается преобразованием

$$B \mapsto (E + \alpha R^*)B(E + \alpha R).$$

В случае  $R = A$  условие устойчивости имеет вид  $\alpha \geq \tau/8$ . Другой интересный пример такой регуляризации соответствует попеременно-треугольному методу, когда  $A = R^* + R$  и  $\alpha \geq \tau/2$ .

Аналогично проводится мультипликативная регуляризация за счет возмущения оператора  $A$ . С учетом неравенства (7.86) можно осуществить преобразование  $A \mapsto A(1 + \alpha R)^{-1}$  или  $A \mapsto (1 + \alpha R)^{-1}A$ . Для простейших двухслойных схем такая регуляризация может рассматриваться как новая редакция регуляризации оператора  $B$ . Для того чтобы

остаться в классе схем с самосопряженными операторами, достаточно выбрать  $R = R(A)$ . Большие возможности предоставляет регуляризация

$$A \mapsto (E + \alpha R^*)^{-1} A (E + \alpha R)^{-1}.$$

В этом случае регуляризирующий оператор  $R$  может напрямую не связываться с оператором  $A$ .

### 7.2.2. Задача с обратным временем

Большие возможности предоставляет принцип регуляризации для построения вычислительных алгоритмов приближенного решения некорректных задач для эволюционных уравнений. В прямоугольнике  $\Omega$  будем искать решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.90)$$

которое отличается от (7.77) только знаком при производных по пространству (соответствует использованию замены  $t$  на  $-t$  — уравнение с обратным временем). Граничные и начальные условия остаются прежними (см. (7.78), (7.79)).

Дифференциальной обратной задаче (7.78), (7.79), (7.90) поставим в соответствие задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} - \Lambda y = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (7.91)$$

Построим безусловно устойчивые разностные схемы для (7.82), (7.91) на основе принципа регуляризации разностных схем.

Используем принцип регуляризации для построения разностных схем для рассматриваемой некорректной задачи. Начнем с простейшей явной разностной схемы

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \Lambda y_n = 0, \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.92)$$

которую дополним начальным условием (7.84).

В соответствии с принципом регуляризации запишем схему (7.92) в каноническом виде с

$$A = -\Lambda, \quad B = E, \quad (7.93)$$

т. е.  $A = A^* < 0$ .

Воспользуемся (см. лемма 3.2) оценкой разностного оператора  $\Lambda$  сверху:

$$\Lambda \leq ME \quad (7.94)$$

с постоянной

$$M = \frac{4}{h_1^2} \max_{x \in \omega} \frac{a^{(1)}(x) + a^{(1)}(x_1 + h_1, x_2)}{2} + \\ + \frac{4}{h_2^2} \max_{x \in \omega} \frac{a^{(2)}(x) + a^{(2)}(x_1, x_2 + h_2)}{2}.$$

**Теорема 7.6.** Явная схема (7.84), (7.92)  $\rho$ -устойчива в  $H$  с

$$\rho = 1 + M\tau. \quad (7.95)$$

*Доказательство.* Это результат следует из общих условий  $\rho$ -устойчивости двухслойных операторно-разностных схем. Разностная схема (7.84), (7.85) с самосопряженными и постоянными операторами  $B > 0$ ,  $A$  будет  $\rho$ -устойчивой в  $H_B$  при (см. теорему 4.3)

$$\frac{1 - \rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1 + \rho}{\tau} B. \quad (7.96)$$

Для рассматриваемой схемы (7.84), (7.92)  $B > 0$ ,  $A < 0$  для  $\rho > 1$  правая часть двустороннего операторного неравенства (7.96) очевидно выполнена при всех  $\tau > 0$ . Левая часть (7.96) принимает вид

$$\frac{\rho - 1}{\tau E} \geq \Lambda$$

и с учетом (7.94) имеет место при выборе  $\rho$  согласно (7.95). ■

**Замечание 1.** При приближенном решении некорректных задач выбор параметра регуляризации должен быть согласован с уровнем погрешности во входных данных. Здесь мы ограничились построением устойчивых вычислительных алгоритмов для некорректных эволюционных задач и исследованием влияния параметра регуляризации только на устойчивость соответствующей разностной схемы. При заданном параметре регуляризации  $\alpha$  указывается минимальное значение  $\rho$  согласно (7.95).

Исходя из явной схемы (7.84), (7.92) для задачи (7.82), (7.91) запишем регуляризованную схему в каноническом виде (7.85) с

$$A = -\Lambda, \quad B = E + \alpha R. \quad (7.97)$$

**Теорема 7.7.** Регуляризованная схема (7.85), (7.97)  $\rho$ -устойчива в  $H_B$  с

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{\alpha} \quad (7.98)$$

при выборе регуляризирующего оператора согласно (7.88) и

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{2\sqrt{\alpha}}, \quad (7.99)$$

если используется (7.89).

*Доказательство.* Для доказательства можно ограничиться проверкой выполнения левой части двустороннего неравенства (7.96), которое для (7.97) принимает вид

$$\frac{\rho - 1}{\tau}(E + \alpha R) \geq \Lambda. \quad (7.100)$$

При  $R = \Lambda$  и выборе  $\rho$  в виде (7.98) неравенство (7.100) выполнено.

При  $R = \Lambda^2$  неравенство (7.100) преобразуется следующим образом:

$$E + \alpha\Lambda^2 - \frac{\tau}{\rho - 1} = \left( \sqrt{\alpha}\Lambda - \frac{\tau}{2\sqrt{\alpha}(\rho - 1)}E \right)^2 + \left( 1 - \frac{\tau^2}{4\alpha(\rho - 1)^2} \right)E \geq 0.$$

Это неравенство будет выполнено при выборе  $\rho$  в виде (7.99). ■

Аналогично строятся и другие регуляризованные разностные схемы. В частности, можно рассмотреть эволюционные задачи второго порядка, задачи с несамосопряженными операторами, аддитивные схемы для многомерных обратных задач и т. д. С построенными регуляризованными разностными схемами можно связать те или иные (стандартные или нестандартные) варианты метода квазиобращения.

### 7.2.3. Метод квазиобращения

Рассмотрим прежде всего методы приближенного решения некорректных задач для эволюционных уравнений, которые основаны на некотором возмущении исходного уравнения, причем для возмущенного уравнения задача уже корректна. Здесь параметр возмущения выступает в качестве параметра регуляризации. Такие методы известны как методы квазиобращения. Приведем априорные оценки решения возмущенной задачи в различных вариантах метода квазиобращения для задач с самосопряженным и положительным оператором. Сходимость приближенного решения  $u_\alpha$  к точному решению  $u$  имеет место в некоторых классах корректности. Имеет смысл рассмотреть вопросы приближенного решения неустойчивых эволюционных задач разностными методами на основе использования различных вариантов метода квазиобращения. Основное внимание необходимо уделить проблеме устойчивости соответствующих разностных схем.

Вначале остановимся на исследовании основного варианта метода квазиобращения. Рассматривается некорректная задача Коши для эволюционного уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} - \mathcal{A}u = 0, \quad (7.101)$$

$$u(0) = u_0 \quad (7.102)$$

в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . В рассматриваемой модельной обратной задаче (7.78), (7.79), (7.90) можно положить  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$  и

$$\mathcal{A}u = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$$

на множестве функций, удовлетворяющих (7.78). Будем считать, что оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен, положительно определен в  $\mathcal{H}$ . Пусть  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  — собственные значения оператора  $\mathcal{A}$ . Соответствующая система собственных функций  $\{w_k\}$ ,  $w_k \in D(\mathcal{A})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ортонормирована и полна в  $\mathcal{H}$ .

Для устойчивого приближенного решения некорректной задачи (7.101), (7.102) применим метод квазиобращения. Принимая во внимание самосопряженность оператора  $\mathcal{A}$ , определим  $u_\alpha(t)$  как решение уравнения

$$\frac{du_\alpha}{dt} - \mathcal{A}u_\alpha + \alpha \mathcal{A}^2 u_\alpha = 0 \quad (7.103)$$

с начальным условием

$$u_\alpha(0) = u_0. \quad (7.104)$$

Сформулируем характерный результат об устойчивости приближенного решения.

**Теорема 7.8.** *Для решения задачи (7.103), (7.104) справедлива оценка*

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \exp\{t/(4\alpha)\} \|u_\alpha(0)\|. \quad (7.105)$$

*Доказательство.* Для доказательства (7.105) домножим уравнение (7.103) скалярно в  $\mathcal{H}$  на  $u_\alpha(t)$ . Это приводит нас к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\alpha\|^2 + \alpha \| \mathcal{A}u_\alpha \|^2 = (\mathcal{A}u_\alpha, u_\alpha). \quad (7.106)$$

Правая часть (7.106) оценивается следующим образом:

$$(\mathcal{A}u_\alpha, u_\alpha) \leq \varepsilon \| \mathcal{A}u_\alpha \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|u_\alpha\|^2. \quad (7.107)$$

Подстановка (7.107) при  $\varepsilon = \alpha$  в (7.106) дает

$$\frac{d}{dt} \|u_\alpha\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha} \|u_\alpha\|^2.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла и вытекает доказываемая оценка (7.105).  $\blacksquare$



Коротко коснемся вопроса сходимости приближенного решения  $u_\alpha(t)$  к точному решению  $u(t)$ . Для погрешности  $v(t) = u_\alpha(t) - u(t)$  из (7.101), (7.103) получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} - \mathcal{A}v + \alpha \mathcal{A}^2 v = -\alpha \mathcal{A}^2 u. \quad (7.108)$$

Некорректность задачи (7.101), (7.102) обусловлена неустойчивостью решения по начальным данным. Вместо точного начального условия (7.104) используется условие

$$u_\alpha(0) = u_0^\delta. \quad (7.109)$$

Для погрешности задания начальных условий естественно использовать оценку типа

$$\|u_0^\delta - u_0\| \leq \delta. \quad (7.110)$$

С учетом этого уравнение (7.108) дополняется начальным условием

$$v(0) = u_0^\delta - u_0, \quad (7.111)$$

причем  $\|v(0)\| \leq \delta$ .

Сходимость приближенного решения к решению некорректной задачи устанавливается в некоторых выбранных классах корректности. Априорные ограничения на решение неустойчивой задачи связываются чаще всего с предположением об ограниченности решения. Применительно к изучаемой нами задаче (7.101), (7.102) можно рассматривать следующие классы решений:

$$\|\mathcal{A}u(t)\| \leq M, \quad (7.112)$$

$$\|\mathcal{A}^2 u(t)\| \leq M \quad (7.113)$$

для всех  $t \in [0, T]$ .

Исследуя устойчивость по начальным данным и правой части, можно установить оценки погрешности в классах априорных ограничений (7.112), (7.113). При ограничениях (7.112) получим

$$\|v(t)\| \leq \delta \exp\{t/(2\alpha)\} + (\exp\{t/\alpha\} - 1)^{1/2} M. \quad (7.114)$$

В классе (7.113) соответствующая оценка имеет вид

$$\|v(t)\| \leq \delta \exp\{t/(2\alpha)\} + \sqrt{2}(\exp\{t/\alpha\} - 1)^{1/2} \alpha M. \quad (7.115)$$

Приведенные оценки (7.114), (7.115) не оптимальны. В частности, из них не вытекает, вообще говоря, сходимость приближенного решения  $u_\alpha(t)$ , определяемого из уравнения (7.103) и начального условия

(7.109), к точному решению  $u(t)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Требуется более тонкие рассуждения. Покажем, например, сходимость в  $\mathcal{H}$  в классе ограниченных в  $\mathcal{H}$  решений.

Рассмотрение проведем по схеме, которая повторяет в основных чертах доказательство сходимости приближенного решения к точному при нелокальном возмущении начального условия. В операторном виде приближенное решение  $u_\alpha(t)$ , которое соответствует неточному начальному условию (7.109), запишем следующим образом

$$u_\alpha(t) = R(t, \alpha)u_0^\delta. \quad (7.116)$$

В такой записи  $R(t, 0)$  определяет точное решение задачи и поэтому  $u(t) = R(t, 0)u_0$ . В соответствии с введенными обозначениями для погрешности  $v$  получим:

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\| &= \|R(t, \alpha)(u_0^\delta - u_0) - (R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\| \leq \\ &\leq \|R(t, \alpha)\| \cdot \|u_0^\delta - u_0\| + \|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\|. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Первое слагаемое в правой части (7.117) соответствует устойчивости по начальным данным (ограниченности оператора  $R(t, \alpha)$ ). Второе слагаемое в правой части (7.117) требует близости решения возмущенной задачи при точных входных данных к точному решению ( $R(t, \alpha)u_0$  к  $u(t)$ ). С этой целью и выделяется некоторый класс решений (класс корректности).

В силу доказанной оценки устойчивости по начальным данным (7.105) и оценки (7.110) имеем

$$\|R(t, \alpha)\| \cdot \|u_0^\delta - u_0\| \leq \exp\{t/(4\alpha)\}\delta. \quad (7.118)$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (7.117).

Оператор  $R(t, \alpha)$  имеет вид

$$R(t, \alpha) = \exp\{(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{A}^2)t\}. \quad (7.119)$$

Для приближенного решения, определяемого из (7.103), (7.109), с учетом (7.119) получим представление

$$u_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0^\delta, w_k) \exp\{(\lambda_k - \alpha\lambda_k^2)t\}w_k. \quad (7.120)$$

В силу (7.120) имеем

$$\begin{aligned} \chi(t) &\equiv \|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{2\lambda_k t\} (1 - \exp\{-\alpha\lambda_k^2 t\})^2 (u_0, w_k)^2. \end{aligned} \quad (7.121)$$

Устойчивость рассматривается в классе ограниченных в  $\mathcal{H}$  решений:

$$\|u(t)\| \leq M, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.122)$$

С учетом (7.122) для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $r(\varepsilon)$  такое, что

$$\sum_{k=r(\varepsilon)+1}^{\infty} \exp\{2\lambda_k t\} (u_0, w_k)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Поэтому из (7.121) получим

$$\begin{aligned} \chi(t) &\leq \sum_{k=1}^{r(\varepsilon)} \exp\{2\lambda_k t\} (1 - \exp\{-\alpha\lambda_k^2 t\})^2 (u_0, w_k)^2 + \\ &+ \sum_{k=r(\varepsilon)+1}^{\infty} \exp\{2\lambda_k t\} (u_0, w_k)^2 \leq M^2 \sum_{k=1}^{r(\varepsilon)} (1 - \exp\{-\alpha\lambda_k^2 t\})^2 + \frac{\varepsilon^2}{8}. \end{aligned}$$

Для каждого  $r(\varepsilon)$  можно указать  $\alpha_0$  такое, что при  $\alpha \leq \alpha_0$

$$M^2 \sum_{k=1}^{r(\varepsilon)} (1 - \exp\{-\alpha\lambda_k^2 t\})^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Поэтому (7.122) дает

$$\|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.123)$$

Принимая во внимание (7.118), (7.123), из (7.117) получим оценку

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \exp\{t/(4\alpha)\} \delta + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7.124)$$

При любом  $\varepsilon > 0$  существует  $\alpha = \alpha(\delta) \leq \alpha_0$  и достаточно малое  $\delta(\varepsilon)$ , при котором

$$\delta \exp\{t/(4\alpha)\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому (7.124) принимает вид

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \varepsilon.$$

Тем самым можем сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 7.9.** Пусть для погрешности начального условия выполнена оценка (7.110). Тогда приближенное решение  $u_\alpha(t)$ , определяемое как решение задачи (7.103), (7.109) при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta \exp\{t/(4\alpha)\} \rightarrow 0$  сходится к ограниченному точному решению  $u(t)$  задачи (7.101), (7.102) в  $\mathcal{H}$ .

**Замечание 1.** Доказанное утверждение допускает обобщения в различных направлениях. Например, в более узком классе априорных ограничений (7.113) можно получить непосредственную оценку

$$\|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\|$$

через параметр регуляризации  $\alpha$ . Из (7.121) и (7.113) следует

$$\|(R(t, \alpha) - R(t, 0))u_0\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 \exp\{2\lambda_k t\} \alpha^2 t^2 (u_0, w_k)^2 \leq \alpha^2 t^2 M^2,$$

и поэтому будет иметь место неравенство

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq \exp\{t/(4\alpha)\}\delta + \alpha t M.$$

Второй рассматриваемый вариант метода квазиобращения связан с переходом к псевдопараболическому уравнению. Для самосопряженного и положительного оператора  $\mathcal{A}$  вместо неустойчивой задачи (7.101), (7.102) решается уравнение

$$\frac{du_\alpha}{dt} - \mathcal{A}u_\alpha + \alpha \mathcal{A} \frac{du_\alpha}{dt} = 0, \quad (7.125)$$

дополненное начальным условием (7.104).

**Теорема 7.10.** Для решения задачи (7.104), (7.125) справедлива оценка

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \exp\{t/\alpha\} \|u_\alpha(0)\|. \quad (7.126)$$

*Доказательство.* Чтобы доказать это, уравнение (7.125) перепишем в виде

$$\frac{du_\alpha}{dt} - (E + \alpha \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}u_\alpha = 0. \quad (7.127)$$

Домножим (7.127) скалярно в  $\mathcal{H}$  на  $u_\alpha(t)$  и получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\alpha\|^2 = ((E + \alpha \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}u_\alpha, u_\alpha). \quad (7.128)$$

Нетрудно видеть, что для правой части (7.128) справедлива оценка

$$((E + \alpha \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}u_\alpha, u_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} (u_\alpha, u_\alpha).$$

Это неравенство на операторном уровне соответствует неравенству

$$(E + \alpha \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A} \leq \frac{1}{\alpha} E. \quad (7.129)$$

Для доказательства неравенства (7.129) перейдем к эквивалентному неравенству, домножив (7.129) справа и слева на  $(E + \alpha A)$ . Получим неравенство

$$(E + \alpha A)A \leq \frac{1}{\alpha}(E + 2\alpha A + \alpha^2 A^2),$$

которое при  $\alpha > 0$  выполняется с очевидностью.

Принимая во внимание (7.129), из (7.128) получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \|u_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u_\alpha\|,$$

из которого и следует доказываемая оценка (7.126). ■

Сходимость приближенного решения к точному устанавливается при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta \exp\{t/\alpha\} \rightarrow 0$  при ранее обсуждавшихся ограничениях.

Кратко обсудим вопросы построения и исследования численных методов решения некорректных эволюционных задач при возмущении самого уравнения. В качестве модельной рассматривается задача (7.78), (7.79), (7.90) — задача с обратным временем в прямоугольнике  $\Omega$ . После дискретизации по пространству приходим к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения (7.82), (7.91).

Разностный аналог основного варианта метода квазиобращения (см. (7.103)) имеет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \Lambda(\sigma_1 y_{n+1} + (1 - \sigma_1) y_n) + \alpha \Lambda^2(\sigma_2 y_{n+1} + (1 - \sigma_2) y_n) = 0, \quad (7.130)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Исследование устойчивости этой схемы с весами проведем на основе использования результатов общей теории устойчивости операторно-разностных схем. Критерии устойчивости формулируются в виде операторных неравенств для разностных схем, записанных в канонической форме.

Исследуемая схема (7.130) записывается в каноническом виде (7.85), если

$$A = -\Lambda + \alpha \Lambda^2, \quad (7.131)$$

$$B = E - \sigma_1 \tau \Lambda + \sigma_2 \tau \alpha \Lambda^2.$$

**Теорема 7.11.** *Схема (7.85), (7.131)  $\rho$ -устойчива в  $H = L_2(\omega)$  при любых  $\tau > 0$  с*

$$\rho = 1 + \frac{1}{4\alpha} \tau, \quad (7.132)$$

если  $\sigma_1 \leq 0$ ,  $\sigma_2 \geq 1/2$ .

*Доказательство.* Отметим прежде всего, что величина  $\rho$  полностью согласуется с оценкой (7.105) для решения непрерывной задачи. Доказательство (7.132) основывается на проверке необходимых и достаточных условий  $\rho$ -устойчивости.

Прежде всего убеждаемся, что при сформулированных ограничениях на веса разностной схемы (7.130) оператор  $B = B^* > 0$ . Правая часть неравенства (7.96) с учетом (7.131) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1+\rho}{\tau} B - A = \\ &= \Lambda - \alpha\Lambda^2 + \frac{1+\rho}{\tau} E - (1+\rho)\sigma_1\Lambda + (1+\rho)\alpha\sigma_2\Lambda^2 = \\ &= \frac{1+\rho}{\tau} E + (1 - (1+\rho)\sigma_1)\Lambda + \alpha((1+\rho)\sigma_2 - 1)\Lambda^2. \end{aligned}$$

Это неравенство при указанных ранее ограничениях на веса будет выполнено для всех  $\rho > 1$ .

Оценку для  $\rho$  получим из левого неравенства в (7.96). При  $\rho = 1 + c\tau$  оно приобретает вид

$$cB \geq -A. \quad (7.133)$$

Подстановка (7.131) в (7.133) дает

$$c(E - \sigma_1\tau\Lambda + \sigma_2\tau\alpha\Lambda^2) \geq \Lambda - \alpha\Lambda^2 = -\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}E - \sqrt{\alpha}\Lambda\right)^2 + \frac{1}{4\alpha}E.$$

При  $\sigma_1 \leq 0$ ,  $\sigma_2 \geq 1/2$  для выполнения неравенства мы можем положить  $c = 1/(4\alpha)$ . Это дает для  $\rho$  выражение (7.132). ■

Аналогично строятся разностные схемы и для других вариантов метода квазиобращения. Например, исследуем двухслойные разностные схемы для варианта псевдопараболического возмущения. Для приближенного решения уравнения (7.91) с начальным условием (7.82) будем использовать разностную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) + \alpha\Lambda \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = 0. \quad (7.134)$$

Схема (7.134) имеет канонический вид (7.85) с

$$A = -\Lambda, \quad B = E + (\alpha - \sigma\tau)\Lambda. \quad (7.135)$$

**Теорема 7.12.** Разностная схема (7.85), (7.135)  $\rho$ -устойчива в  $H$  при любых  $\tau > 0$  с

$$\rho = 1 + \frac{1}{\alpha} \tau, \quad (7.136)$$

если  $\sigma \leq 0$ .

*Доказательство.* В данном случае условие  $B = B^* > 0$  и правое неравенство (7.96) выполнены с очевидностью. Левое неравенство в (7.96) с учетом (7.135) принимает вид

$$c(E + (\alpha - \sigma\tau)\Lambda) \geq \Lambda,$$

и поэтому можно положить  $c = 1/\alpha$ , а для  $\rho$  будем иметь в (7.136). ■

**Замечание 1.** Оценка разностного решения схемы (7.134) с  $\rho$ , которое определяется выражением (7.136), полностью согласуется с оценкой решения дифференциальной задачи (см. оценку (7.126)).

**Замечание 2.** С точностью до обозначений схема метода квазиобращения (7.134) совпадает с обычной схемой с весами, которая выписывается непосредственно для задачи (7.82), (7.91):

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \Lambda(\sigma' y_{n+1} + (1 - \sigma') y_n) = 0. \quad (7.137)$$

Достаточно положить в (7.137)  $\sigma' = \sigma - \alpha/\tau$ . Существенно лишь то, что в схеме (7.137) вес  $\sigma'$  отрицательный.

Приведенные схемы, а равно и другие известные, могут быть получены на основе регуляризации неустойчивых разностных схем. Более того, легко строятся и новые варианты метода квазиобращения на основе анализа регуляризованных разностных схем.

Разностная схема псевдопараболического варианта метода квазиобращения (7.134) есть не что иное как регуляризованная схема типа (7.85), (7.88), (7.97). Разностная схема основного варианта метода квазиобращения (7.130) соответствует использованию регуляризованных разностных схем с возмущением как оператора  $A$ , так и оператора  $B$  (см. (7.131)). С использованием регуляризованной разностной схемы (7.85), (7.89), (7.97) можно связать новый вариант метода квазиобращения, в котором приближенное решение находится как решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{du_\alpha}{dt} - Au_\alpha + \alpha A^2 \frac{du_\alpha}{dt} = 0. \quad (7.138)$$

При построении регуляризованных разностных схем сама возмущенная дифференциальная задача становится излишней. Заметим также, что для разностных задач построение устойчивых схем на основе принципа регуляризации существенно облегчено, так как имеются общие результаты о необходимых и достаточных условиях  $\rho$ -устойчивости разностных схем.

### 7.2.4. Регуляризованные аддитивные схемы

При вычислительной реализации построенных разностных схем метода квазиобращения могут возникать определенные сложности. Это связано прежде всего с тем, что возмущенная задача является сингулярно возмущенной (при старших производных стоят малые параметры возмущения). Необходимо подчеркнуть, что возмущенное уравнение — это уравнение более высокого порядка. При обсуждении этой проблемы будем ориентироваться на стандартный вариант метода квазиобращения (7.103), (7.104).

При приближенном решении задачи (7.77)–(7.79) естественно использовать разностную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - \Lambda y_n + \alpha \Lambda^2 (\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma) y_n) = 0. \quad (7.139)$$

Это означает, что  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma$  в двухпараметрической схеме (7.130). Схема (7.139)  $\rho$ -устойчива (см. теорему 7.11) при  $\sigma \geq 1/2$ .

Выше мы показали, что разностные схемы метода квазиобращения могут быть получены двояко. Первый подход связан с аппроксимацией возмущенной дифференциальной задачи. Второй подход базируется на использовании принципа регуляризации операторно-разностных схем. В связи с рассмотрением (7.139) может оказаться полезной и еще одна интерпретация схем метода квазиобращения как схем со сглаживанием сеточного решения.

Схему (7.139) будем рассматривать как схему типа предиктор-корректор. Ограничимся рассмотрением простейшего случая  $\sigma = 1$ . В этом случае на этапе предиктора ищется сеточное решение  $\tilde{y}_{n+1}$ , определяемое по явной схеме:

$$\frac{\tilde{y}_{n+1} - y_n}{\tau} - \Lambda y_n = 0. \quad (7.140)$$

Этап корректора в соответствии с (7.139) при  $\sigma = 1$  есть

$$\frac{y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}}{\tau} + \alpha \Lambda^2 y_{n+1} = 0. \quad (7.141)$$

Явная схема (7.140) неустойчива и для получения устойчивого решения применяется (7.141). Само уравнение (7.141) можно рассматривать как уравнение Эйлера для задачи сглаживания сеточной функции  $\tilde{y}_{n+1}$ :

$$J_\alpha(y_{n+1}) = \min_{v \in H} J_\alpha(v), \quad (7.142)$$

$$J_\alpha(v) = \|v - \tilde{y}_{n+1}\|^2 + \tau \alpha \|\Lambda v\|^2. \quad (7.143)$$

В такой интерпретации можно говорить о методе квазиобращения в форме (7.140), (7.141) (или (7.140), (7.142), (7.143)) как об алгоритме локальной регуляризации. Такая связь особенно прозрачна на сеточном уровне.



Реализация разностной схемы (7.139) связана с решением сеточного эллиптического уравнения четвертого порядка

$$\alpha\sigma\Lambda^2 v + \frac{1}{\tau}v = f.$$

В настоящее время это является достаточно сложной вычислительной проблемой. Поэтому хотелось бы иметь возможность построения более простых с точки зрения вычислительной реализации регуляризованных разностных схем. В этой связи заслуживают внимания аддитивные схемы расщепления по пространственным переменным, в которых переход на новый временной слой связывается с решением одномерных сеточных задач.

Будем строить аддитивные операторно-разностные схемы, отталкиваясь от схемы (7.139). Начнем с интерпретации схемы (7.139) как регуляризованной схемы. В качестве производящей, как обычно, рассматривается явная схема, которая для метода квазиобращения есть

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (\alpha\Lambda^2 - \Lambda)y_n = 0. \quad (7.144)$$

Варианту аддитивной регуляризации соответствует запись схемы (7.139) в виде

$$(E + \alpha\sigma\tau\Lambda^2)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (\alpha\Lambda^2 - \Lambda)y_n = 0.$$

В этом случае переход от (7.144) интерпретируется как

$$B = E \mapsto B + \alpha\sigma\tau\Lambda^2.$$

Можно придать схеме (7.139) несколько другой эквивалентный вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (E + \alpha\sigma\tau\Lambda^2)^{-1}(\alpha\Lambda^2 - \Lambda)y_n = 0. \quad (7.145)$$

Схема (7.145) соответствует применению варианта мультипликативной регуляризации

$$A = \alpha\Lambda^2 - \Lambda \mapsto (E + \alpha\sigma\tau\Lambda^2)^{-1}A. \quad (7.146)$$

Именно вариант регуляризации (7.145), (7.146) положим в основу при построении аддитивных регуляризованных операторно-разностных схем.

Для оператора  $\Lambda$  в силу (7.80) имеет место аддитивное представление

$$\Lambda = \sum_{\beta=1}^2 \Lambda_{\beta}, \quad \Lambda_{\beta}y = -(a_{\beta}y\bar{x}_{\beta})_{x_{\beta}}, \quad \beta = 1, 2. \quad (7.147)$$

Каждое из этих операторных слагаемых положительно:

$$\Lambda_{\beta} = \Lambda_{\beta}^* > 0, \quad \beta = 1, 2,$$

и они в общем случае непостоянны:

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \neq \Lambda_2 \Lambda_1.$$

Для трехмерных задач оператор  $\Lambda$  разбивается на три одномерных попарно непостоянных положительных оператора.

Аддитивную схему будем строить, используя аналогичные (7.145) конструкции, которые применяются для каждого операторного слагаемого в (7.147). Это дает регуляризованную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sum_{\beta=1}^2 (E + \alpha\sigma\tau\Lambda_\beta^2)^{-1} (\alpha\Lambda_\beta^2 - \Lambda_\beta) y_n = 0. \quad (7.148)$$

Для того чтобы получить условия устойчивости, схему (7.148) запишем в виде

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sum_{\beta=1}^2 A_\beta y_n = 0, \quad (7.149)$$

где

$$A_\beta = (E + \alpha\sigma\tau\Lambda_\beta^2)^{-1} (\alpha\Lambda_\beta^2 - \Lambda_\beta), \quad \beta = 1, 2. \quad (7.150)$$

В рассматриваемом случае  $A_\beta = A_\beta^*$ ,  $\beta = 1, 2$ , и поэтому

$$A = \sum_{\beta=1}^2 A_\beta = A^*. \quad (7.151)$$

Схема (7.149), (7.151) будет  $\rho$ -устойчивой при выполнении двухстороннего неравенства (7.96), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{1 - \rho}{\tau} E \leq A \leq \frac{1 + \rho}{\tau} E. \quad (7.152)$$

Неравенство (7.152) будет выполнено, например, при

$$\frac{1 - \rho}{2\tau} E \leq A_\beta \leq \frac{1 + \rho}{2\tau} E, \quad \beta = 1, 2.$$

С учетом (7.150) перепишем это неравенство следующим образом:

$$\frac{1 - \rho}{2\tau} (E + \alpha\sigma\tau\Lambda_\beta^2) \leq \alpha\Lambda_\beta^2 - \Lambda_\beta \leq \frac{1 + \rho}{2\tau} (E + \alpha\sigma\tau\Lambda_\beta^2). \quad (7.153)$$

Принимая во внимание, что

$$\alpha\Lambda_\beta^2 - \Lambda_\beta \geq -\frac{1}{4\alpha} E,$$

для выполнения левого неравенства (7.153) достаточно положить

$$\rho = 1 + \frac{\tau}{2\alpha}. \quad (7.154)$$

Правое неравенство (7.153) будет всегда выполнено при  $\sigma \geq 1$ . Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 7.13.** *Регуляризованная аддитивная схема (7.148)  $\rho$ -устойчива с  $\rho$ , определяемым согласно (7.154), в  $H$  при любых  $\tau > 0$ , если  $\sigma \geq 1$ .*

Реализация аддитивной схемы (7.148) связана с обращением одномерных сеточных операторов  $E + \alpha\sigma\tau\Lambda_\beta^2$ ,  $\beta = 1, 2$ . Можно предложить следующую организацию вычислений, которая демонстрирует тесную связь рассматриваемых регуляризованных схем с аддитивно-усредненными разностными схемами.

Будем определять вспомогательные сеточные функции  $y_{n+1}^{(\beta)}$ ,  $\beta = 1, 2$ , из решения уравнений

$$\frac{y_{n+1}^{(\beta)} - y_n}{2\tau} + (E + \alpha\sigma\tau\Lambda_\beta^2)^{-1}(\alpha\Lambda_\beta^2 - \Lambda_\beta)y_n = 0, \quad \beta = 1, 2. \quad (7.155)$$

После этого решение на новом слое дается формулой

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 y_{n+1}^{(\beta)}. \quad (7.156)$$

Уравнению (7.155) можно придать вид, аналогичный (7.139)

$$\frac{y_{n+1}^{(\beta)} - y_n}{2\tau} - \Lambda_\beta y_n + \alpha\Lambda_\beta^2(\sigma y_{n+1}^{(\beta)} + (1 - \sigma)y_n) = 0.$$

Тем самым нахождение  $y_{n+1}^{(\beta)}$ ,  $\beta = 1, 2$ , соответствует применению метода квазиобращения для каждого операторного слагаемого в (7.147).

Выше (см. (7.140), (7.141)) мы отмечали тесную связь метода квазиобращения с алгоритмами локальной регуляризации (сглаживания на каждом временном слое — (7.140), (7.142), (7.143)). В такой интерпретации регуляризованная схема (7.148) соответствует применению алгоритма локальной регуляризации со сглаживанием по отдельным направлениям (см. (7.155)) и последующем усреднении в соответствии с (7.156).

С регуляризованной аддитивной схемой (7.148), с аддитивно-усредненной схемой (7.155), (7.156) естественно связать метод квазиобращения, который применяется для решения задачи (7.101), (7.102) при

$$A = \sum_{\beta=1}^p A_\beta, \quad A_\beta = A_\beta^* \geq 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \quad (7.157)$$

В рассматриваемом нами случае двухкомпонентного расщепления  $p = 2$ . Приближенное решение задачи (7.101), (7.102), (7.157) определяется как решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{du_\alpha}{dt} - \sum_{\beta=1}^p \mathcal{A}_\beta u_\alpha + \alpha \sum_{\beta=1}^p \mathcal{A}_\beta^2 u_\alpha = 0. \quad (7.158)$$

Для решения задачи (7.104), (7.158) справедлива оценка устойчивости по начальным данным

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \exp \left\{ \frac{pt}{4\alpha} \right\} \|u_0\|.$$

С этой оценкой полностью согласуется полученная выше оценка  $\rho$ -устойчивости (см. (7.154)) для регуляризованной разностной схемы (7.148).

### 7.2.5. Программа

При приближенном решении задачи с обратным временем будем использовать регуляризованную аддитивную схему (7.148). Вычислительная реализация базируется на ее интерпретации как аддитивно-усредненной схемы (7.155), (7.156). Для решения сеточных пятидиагональных задач используется подпрограмма PROG5, реализующая алгоритм пятиточечной прогонки. Подробное описание алгоритма и подпрограммы дано в п. 6.1.

Входные данные для задачи с обратным временем формируются из решения прямой задачи (7.77)–(7.79). Приближенное решение находится с использованием чисто неявной аддитивно-усредненной схемы

$$\frac{y_{n+1}^{(\beta)} - y_n}{2\tau} + \Lambda_\beta y_{n+1} = 0, \quad \beta = 1, 2,$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 y_{n+1}^{(\beta)}.$$

Разностное решение прямой задачи на конечный момент времени возмущается, и эта функция используется в качестве входных данных при решении обратной задачи.

Выбор параметра регуляризации проводился по невязке с использованием последовательности

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad q > 0,$$

при заданных начальном значении  $\alpha_0 = 0,001$  и множителе  $q = 0,75$ . Для вычисления невязки дополнительно решается прямая задача, в которой в качестве начальных данных выступает решение обратной задачи.

В нижеприведенной программе мы для простоты ограничились простейшим случаем постоянных коэффициентов, когда в (7.77)  $k(x) = 1$ , а в регуляризованной аддитивной схеме (7.155), (7.156) весовой параметр  $\sigma = 1$ .

### Программа PROBLEM11

```

C
C   PROBLEM11 - ЗАДАЧА С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ
C               ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               АДДИТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ СХЕМА
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.01, N1 = 101, N2 = 101, M = 101 )
C   DIMENSION UO(N1,N2), UT(N1,N2), UTD(N1,N2), U(N1,N2),
+         X1(N1), X2(N2), Y(N1,N2), Y1(N1,N2), Y2(N1,N2), YY(N1),
+         A(N1), B(N1), C(N1), D(N1), E(N1), F(N1) ! N1 >= N2
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   X1L, X2L   - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО УГЛА;
C   X1R, X2R   - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО УГЛА;
C   N1, N2     - ЧИСЛО УЗЛОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКИ;
C   H1, H2     - ШАГИ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TAU        - ШАГ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA      - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   Q          - МНОЖИТЕЛЬ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ;
C   UO(N1,N2)  - ВОССТАНАВЛИВАЕМОЕ НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ;
C   UT(N1,N2)  - РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ;
C   UTD(N1,N2) - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ;
C   U(N1,N2)   - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   X1L = 0.0D0
C   X1R = 1.0D0
C   X2L = 0.0D0
C   X2R = 1.0D0
C   TMAX = 0.025D0
C   PI   = 3.1415926D0
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H1 = (X1R-X1L) / (N1-1)
C   H2 = (X2R-X2L) / (N2-1)
C   TAU = TMAX / (M-1)
C   DO I = 1, N1
C       X1(I) = X1L + (I-1)*H1
C   END DO
C   DO J = 1, N2
C       X2(J) = X2L + (J-1)*H2
C   END DO

```

```

C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C   АДДИТИВНО-УСРЕДНЕННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    UO(I,J) = AU(X1(I),X2(J))
    Y(I,J) = UO(I,J)
  END DO
END DO
DO K = 2, M
C
C   ПРОГОНКА ПО X1
C
  DO J = 2, N2-1
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
    B(1) = 0.DO
    C(1) = 1.DO
    F(1) = 0.DO
    A(N1) = 0.DO
    C(N1) = 1.DO
    F(N1) = 0.DO
    DO I = 2, N1-1
      A(I) = 1.DO / (H1*H1)
      B(I) = 1.DO / (H1*H1)
      C(I) = A(I) + B(I) + 0.5DO / TAU
      F(I) = 0.5DO * Y(I,J) / TAU
    END DO
C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
  ITASK1 = 1
  CALL PROG3 ( N1, A, C, B, F, YY, ITASK1 )
  DO I = 1, N1
    Y1(I,J) = YY(I)
  END DO
END DO
C
C   ПРОГОНКА ПО X2
C
  DO I = 2, N1-1
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
    B(1) = 0.DO
    C(1) = 1.DO
    F(1) = 0.DO
    A(N2) = 0.DO
    C(N2) = 1.DO

```

```

F(N2) = 0.DO
DO J = 2, N2-1
  A(J) = 1.DO / (H2*H2)
  B(J) = 1.DO / (H2*H2)
  C(J) = A(J) + B(J) + 0.5DO / TAU
  F(J) = 0.5DO * Y(I,J) / TAU
END DO

C
C  РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C

  ITASK1 = 1
  CALL PROG3 ( N2, A, C, B, F, YY, ITASK1 )
  DO J = 1, N2
    Y2(I,J) = YY(J)
  END DO
  END DO

C
C  АДДИТИВНОЕ УСРЕДНЕНИЕ
C

  DO I = 1, N1
    DO J = 1, N2
      Y(I,J) = 0.5DO * (Y1(I,J) + Y2(I,J))
    END DO
  END DO
  END DO

C
C  ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C

  DO I = 1, N1
    DO J = 1, N2
      UT(I,J) = Y(I,J)
      UTD(I,J) = Y(I,J)
    END DO
  END DO
  DO I = 2, N1-1
    DO J = 2, N2-1
      UTD(I,J) = UT(I,J) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
    END DO
  END DO

C
C  ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C  ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПО ПОДБОРУ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C

  IT = 0
  ITMAX = 100
  ALPHA = 0.001DO
  Q = 0.75DO
100 IT = IT + 1

C
C  АДДИТИВНО-УСРЕДНЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ СХЕМА
C
C  НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

```

```

C
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    Y(I,J) = UTD(I,J)
  END DO
END DO
DO K = 2, M

C
C
C   ПРОГОНКА ПО X1
C
  DO J = 2, N2-1

C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
C
  DO I = 2, N1-1
    A(I) = ALPHA / (H1**4)
    B(I) = 4.DO * ALPHA / (H1**4)
    C(I) = 6.DO * ALPHA / (H1**4) + 0.5DO / TAU
    D(I) = 4.DO * ALPHA / (H1**4)
    E(I) = ALPHA / (H1**4)
    F(I) = 0.5DO * Y(I,J) / TAU
+   - (Y(I+1,J) - 2.DO*Y(I,J) + Y(I-1,J)) / (H1**2)
  END DO
  C(1) = 1.DO
  D(1) = 0.DO
  E(1) = 0.DO
  F(1) = 0.DO
  B(2) = 0.DO
  C(2) = 5.DO * ALPHA / (H1**4) + 0.5DO / TAU
  C(N1-1) = 5.DO * ALPHA / (H1**4) + 0.5DO / TAU
  D(N1-1) = 0.DO
  A(N1) = 0.DO
  B(N1) = 0.DO
  C(N1) = 1.DO
  F(N1) = 0.DO

C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
  ITASK2 = 1
  CALL PROG5 ( N1, A, B, C, D, E, F, YY, ITASK2 )
  DO I = 1, N1
    Y1(I,J) = YY(I)
  END DO
END DO

C
C   ПРОГОНКА ПО X2
C
  DO I = 2, N1-1

C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
C
  DO J = 2, N2-1
    A(J) = ALPHA / (H2**4)

```



```

      B(J) = 4.DO * ALPHA / (H2**4)
      C(J) = 6.DO * ALPHA / (H2**4) + 0.5DO / TAU
      D(J) = 4.DO * ALPHA / (H2**4)
      E(J) = ALPHA / (H2**4)
      F(J) = 0.5DO * Y(I,J) / TAU
+      - (Y(I,J+1) - 2.DO*Y(I,J) + Y(I,J-1)) / (H2**2)
      END DO
      C(1) = 1.DO
      D(1) = 0.DO
      E(1) = 0.DO
      F(1) = 0.DO
      B(2) = 0.DO
      C(2) = 5.DO * ALPHA / (H2**4) + 0.5DO / TAU
      C(N2-1) = 5.DO * ALPHA / (H2**4) + 0.5DO / TAU
      D(N2-1) = 0.DO
      A(N2) = 0.DO
      B(N2) = 0.DO
      C(N2) = 1.DO
      F(N2) = 0.DO
C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      ITASK2 = 1
      CALL PROG5 ( N2, A, B, C, D, E, F, YY, ITASK2 )
      DO J = 1, N2
        Y2(I,J) = YY(J)
      END DO
      END DO
C
C      АДДИТИВНОЕ УСРЕДНЕНИЕ
C
      DO I = 1, N1
        DO J = 1, N2
          Y(I,J) = 0.5DO * (Y1(I,J) + Y2(I,J))
        END DO
      END DO
      DO I = 1, N1
        DO J = 1, N2
          U(I,J) = Y(I,J)
        END DO
      END DO
C
C      ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
      DO K = 2, M
C
C      ПРОГОНКА ПО X1
C
        DO J = 2, N2-1
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C

```

```

      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      F(1) = 0.DO
      A(N1) = 0.DO
      C(N1) = 1.DO
      F(N1) = 0.DO
      DO I = 2, N1-1
         A(I) = 1.DO / (H1*H1)
         B(I) = 1.DO / (H1*H1)
         C(I) = A(I) + B(I) + 0.5DO / TAU
         F(I) = 0.5DO * Y(I,J) / TAU
      END DO
C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      ITASK1 = 1
      CALL PROG3 ( N1, A, C, B, F, YY, ITASK1 )
      DO I = 1, N1
         Y1(I,J) = YY(I)
      END DO
      END DO
C
C      ПРОГОНКА ПО X2
C
      DO I = 2, N1-1
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      F(1) = 0.DO
      A(N2) = 0.DO
      C(N2) = 1.DO
      F(N2) = 0.DO
      DO J = 2, N2-1
         A(J) = 1.DO / (H2*H2)
         B(J) = 1.DO / (H2*H2)
         C(J) = A(J) + B(J) + 0.5DO / TAU
         F(J) = 0.5DO * Y(I,J) / TAU
      END DO
C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      ITASK1 = 1
      CALL PROG3 ( N2, A, C, B, F, YY, ITASK1 )
      DO J = 1, N2
         Y2(I,J) = YY(J)
      END DO
      END DO
C
C      АДДИТИВНОЕ УСРЕДНЕНИЕ
C
      DO I = 1, N1

```

```

      DO J = 1, N2
        Y(I,J) = 0.5D0 * (Y1(I,J) + Y2(I,J))
      END DO
    END DO
  END DO
C
C КРИТЕРИЙ ВЫХОДА ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА
C
  SUM = 0.D0
  DO I = 2, N1-1
    DO J = 2, N2-1
      SUM = SUM + (Y(I,J) - UTD(I,J))**2*N1*N2
    END DO
  END DO
  SL2 = DSQRT(SUM)
C
  IF (IT.EQ.1) THEN
    IND = 0
    IF (SL2.LT.DELTA) THEN
      IND = 1
      Q = 1.D0/Q
    END IF
    ALPHA = ALPHA*Q
    GO TO 100
  ELSE
    ALPHA = ALPHA*Q
    IF (IND.EQ.0 .AND. SL2.GT.DELTA) GO TO 100
    IF (IND.EQ.1 .AND. SL2.LT.DELTA) GO TO 100
  END IF
C
C РЕШЕНИЕ
C
  WRITE ( 01, * ) ((UTD(I,J),I=1,N1), J=1,N2)
  WRITE ( 01, * ) ((U(I,J),I=1,N1), J=1,N2)
  CLOSE ( 01 )
  STOP END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AU ( X1, X2 )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
  AU = 0.D0
  IF ((X1-0.6D0)**2 + (X2-0.6D0)**2.LE.0.04D0) AU = 1.D0
C
  RETURN
  END

```

### 7.2.6. Примеры расчетов

Представленные ниже результаты получены при использовании равномерной сетки с  $h_1 = 0,01$ ,  $h_2 = 0,01$  для задачи в единичном квадрате.

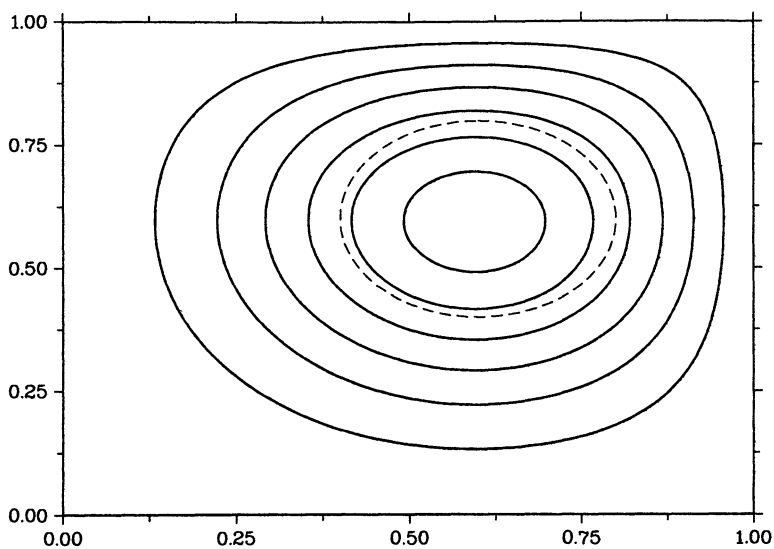


Рис. 7.5. Решение прямой задачи при  $t = T$

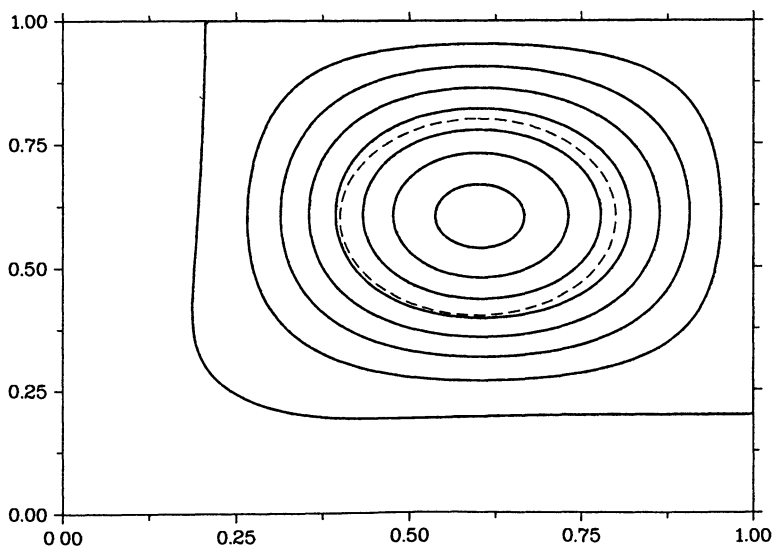


Рис. 7.6. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

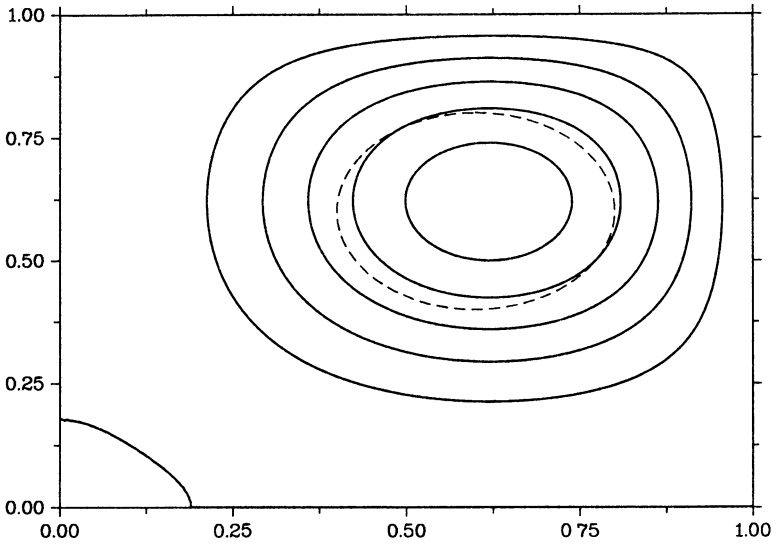


Рис. 7.7. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,02$

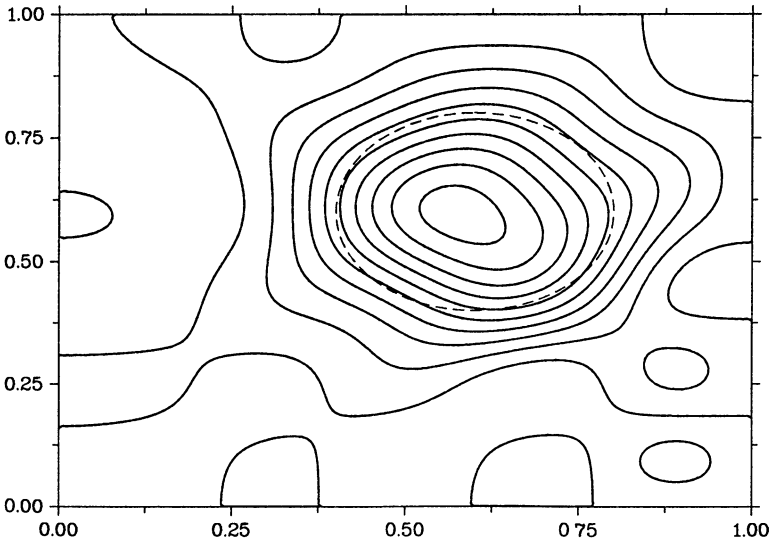


Рис. 7.8. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$

В качестве входных данных берется решение прямой задачи на момент времени  $T = 0,025$ , шаг сетки по времени  $\tau = 0,00025$ . Для прямой задачи начальное условие, которое и есть точное решение обратной задачи на конечный момент времени, задается в виде

$$u_0(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1, & (x_1 - 0,6)^2 + (x_2 - 0,6)^2 \leq 0,04, \\ 0, & (x_1 - 0,6)^2 + (x_2 - 0,6)^2 \geq 0,04. \end{cases}$$

Решение прямой задачи на конечный момент времени (точное начальное условие для прямой задачи) показано на рис. 7.5. Представлены изолинии с шагом  $\Delta u = 0,05$ .

На рис. 7.6 представлено решение обратной задачи при уровне погрешностей, определяемом величиной  $\delta = 0,01$  (здесь  $\Delta u = 0,1$ ). В нашем примере восстанавливается разрывная функция. В силу этого рассчитывать на большую точность не приходится. Влияние уровня погрешностей прослеживается на рис. 7.7, 7.8.

## 7.3. Итерационное решение ретроспективной задачи

Отмечаются основные особенности приближенного решения задачи с обратным временем при использовании итерационных методов уточнения начального условия. Рассматривается модельная задача для двумерного нестационарного параболического уравнения.

### 7.3.1. Постановка задачи

При решении обратных задач для уравнений математической физики широко используются градиентные итерационные методы при вариационной формулировке обратной задачи. Здесь рассматривается наиболее простой итерационный метод при приближенном решении ретроспективной обратной задачи для параболического уравнения второго порядка. Для поставленной обратной задачи итерационно уточняется начальное условие, т. е. на каждой итерации решается обычная прямая краевая задача для параболического уравнения.

На основе общей теории итерационных методов решения операторных уравнений устанавливаются достаточные условия сходимости итерационного процесса, проводится выбор итерационных параметров. В таких задачах оператор перехода на новое итерационное приближение позволяет выделить приближенное решение искомого класса гладкости.

Рассмотрим в качестве модельной двумерную задачу в прямоугольнике

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 < x_\beta < l_\beta, \beta = 1, 2 \}.$$

В  $\Omega$  ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t < T, \quad (7.159)$$

дополненного простейшими однородными граничными условиями первого рода:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.160)$$

В рассматриваемой обратной задаче вместо задания решения на начальный момент времени  $t = 0$  задается решение на конечный момент времени:

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \quad (7.161)$$

Такая обратная задача корректна, например, в классах ограниченных решений.

### 7.3.2. Разностная задача

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (7.159)–(7.161) дифференциально-разностную задачу, проведя дискретизацию по пространству. Будем считать для простоты, что в области  $\Omega$  введена равномерная по каждому направлению сетка с шагами  $h_{\beta}$ ,  $\beta = 1, 2$ , и пусть  $\omega$  — множество внутренних узлов.

На множестве сеточных функций  $y(x)$  таких, что  $y(x) = 0$ ,  $x \notin \omega$ , определим сеточный оператор  $\Lambda$  соотношением

$$\Lambda y = - \sum_{\beta=1}^2 (a_{\beta} y_{\bar{x}_{\beta}})_{x_{\beta}}, \quad (7.162)$$

положив, например,

$$a_1(x) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2),$$

$$a_2(x) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2).$$

В сеточном гильбертовом пространстве  $H$  скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h_1h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

В  $H$  имеем  $\Lambda = \Lambda^* > 0$ . От (7.159)–(7.161) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = 0, \quad x \in \omega, \quad 0 \leq t < T \quad (7.163)$$

при заданном

$$y(T) = \varphi, \quad x \in \omega. \quad (7.164)$$

Ранее мы обсуждали возможности построения регуляризирующих алгоритмов для приближенного решения задачи (7.163), (7.164) на основе возмущения уравнения или же начального условия. Здесь для решения обратной задачи (7.163), (7.164) будем использовать итерационные методы.

### 7.3.3. Итерационное уточнение начального условия

Будем ориентироваться на применение методов, в которых на каждой итерации соответствующие корректные задачи решаются на основе использования стандартных двухслойных разностных схем.

Пусть вместо обратной задачи (7.163), (7.164) рассматривается прямая задача для уравнения (7.163), когда вместо (7.164) используется начальное условие

$$y(0) = v, \quad x \in \omega. \quad (7.165)$$

Обозначим через  $y_n$  разностное решение на момент времени  $t_n = n\tau$ , где  $\tau > 0$  — шаг по времени, причем  $N_0\tau = T$ . При использовании обычной двухслойной схемы с весами переход на новый временной слой в задаче (7.163), (7.165) осуществляется в соответствии с

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.166)$$

$$y_0 = v, \quad x \in \omega. \quad (7.167)$$

Как хорошо известно, схема с весами (7.166), (7.167) безусловно устойчива при  $\sigma \geq 1/2$ , и справедлива следующая оценка устойчивости

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| \leq \dots \leq \|y_0\| = \|v\|, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (7.168)$$

Тем самым норма решения со временем убывает.

Для приближенного решения обратной задачи (7.163), (7.164) будем использовать простейший итерационный процесс, основанный на последовательном уточнении начального условия и решения на каждой итерации прямой задачи. Придадим этой задаче соответствующую операторную формулировку.

Из (7.166), (7.167) для заданного  $y_0$  на конечный момент времени получим

$$y_{N_0} = S^{N_0} v, \quad (7.169)$$

где  $S$  — оператор перехода с одного временного слоя на другой:

$$S = (E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}(E + (\sigma - 1)\tau\Lambda). \quad (7.170)$$



С учетом (7.163), (7.164) и (7.169) приближенному решению обратной задачи естественно сопоставить решение следующего сеточного операторного уравнения

$$Av = \varphi, \quad x \in \omega, \quad A = S^N. \quad (7.171)$$

В силу самосопряженности оператора  $\Lambda$  самосопряженным является оператор перехода  $S$  и оператор  $A$  в (7.171). Однозначная разрешимость сеточного уравнения (7.171) будет иметь место, например, при положительности оператора  $A$ . Это условие будет выполнено для положительного оператора перехода  $S$ . Принимая во внимание представление (7.170), получим  $S > 0$  при

$$\sigma \geq 1. \quad (7.172)$$

Условие (7.172) на вес схемы (7.166), (7.167) является более жестким, чем обычное условие устойчивости. В нашем случае для оператора  $A$ , определяемого согласно (7.171), при ограничениях (7.172) имеем

$$0 < A = A^* < E. \quad (7.173)$$

Для решения уравнения (7.171), (7.173) можно использовать явный двухслойный итерационный метод, который записывается в виде

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{s_{k+1}} + Av_k = \varphi, \quad (7.174)$$

где  $s_{k+1}$  — итерационные параметры. Разностное решение, которое соответствует начальному условию  $v_k$  обозначим  $y^{(k)}$ .

Рассматриваемый итерационный метод соответствует следующей организации вычислений при приближенном решении ретроспективной обратной задачи (7.159), (7.160).

Сначала при заданном  $v_k$  решается прямая задача с использованием разностной схемы

$$\frac{y_{n+1}^{(k)} - y_n^{(k)}}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1}^{(k)} + (1 - \sigma)y_n^{(k)}) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.175)$$

$$y_0^{(k)} = v_k, \quad x \in \omega, \quad (7.176)$$

для определения  $y_{N_0}^{(k)}$ .

После того как найдено решение прямой задачи на конечный момент времени в соответствии с (7.174) уточняется начальное условие:

$$v_{k+1} = v_k - s_{k+1}(y_{N_0}^{(k)} - \varphi). \quad (7.177)$$

Как следует из общей теории итерационных методов, скорость сходимости метода (7.174) при решении уравнения (7.171) определяется постоянными энергетической эквивалентности  $\gamma_\beta$ ,  $\beta = 1, 2$ :

$$\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1 > 0. \quad (7.178)$$

Принимая во внимание (7.173), можно положить  $\gamma_2 = 1$ . Положительная постоянная  $\gamma_1$  зависит от сетки и лежит вблизи нуля.

Для стационарного итерационного метода ( $s_k = s_0 = \text{const}$  в (7.174)) условия сходимости имеют в наших условиях вид  $s_0 \leq 2$ . Для оптимального постоянного значения итерационного параметра имеем  $s_0 \approx 1$ . Для ускорения сходимости необходимо ориентироваться на применение итерационных методов вариационного типа. При использовании итерационного метода минимальных невязок для итерационных параметров имеем

$$s_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{(Ar_k, Ar_k)}, \quad r_k = Av_k - \varphi.$$

В этом случае на каждой итерации минимизируется норма невязки, т. е. верна оценка

$$\|r_{k+1}\| < \|r_k\| < \dots < \|r_0\|.$$

При использовании более общего неявного итерационного метода вместо (7.174) имеем

$$B \frac{v_{k+1} - v_k}{s_{k+1}} + Av_k = \varphi, \quad (7.179)$$

где  $B = B^* > 0$ . В методе минимальных поправок для итерационных параметров используются расчетные формулы

$$s_{k+1} = \frac{(Aw_k, w_k)}{(B^{-1}Aw_k, Aw_k)}, \quad w_k = B^{-1}r_k.$$

Для этого случая минимизируется поправка  $w_{k+1}$  на каждой итерации, т. е. верна оценка

$$\|w_{k+1}\| < \|w_k\| < \dots < \|w_0\|.$$

Аналогично рассматриваются и более быстрые трехслойные вариационные итерационные методы.

Отметим некоторые особенности выбора оператора  $B$  при решении некорректных задач. В обычных итерационных методах выбор оператора  $B$  подчинен исключительно ускорению скорости сходимости итерационного метода. При решении некорректных задач итерационный процесс обрывается до достижения невязки, величина которой определяется погрешностью входных данных. Для нас важно не только с какой скоростью сходится итерационный процесс на этом участке убывания, но и в каком классе гладкости этот итерационный процесс сходится, в какой норме необходимый уровень невязки достигается. Принципиальная особенность приближенного решения некорректных задач итерационными методами состоит в том, что выделение приближенного решения из необходимого класса гладкости достигается выбором оператора  $B$ .

### 7.3.4. Программа

Рассматриваемый итерационный метод базируется на уточнении начального условия для решения хорошо изученной прямой задачи. Для реализации неявных разностных схем (7.175), (7.176) приходится на каждом временном шаге решать двумерные сеточные эллиптические задачи. С этой целью мы используем итерационные методы (внутренний итерационный процесс).

#### Программа PROBLEM12

```

C
C   PROBLEM12 - ЗАДАЧА С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ
C               ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               ИТЕРАЦИОННОЕ УТОЧНЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-N, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.01D0, N1 = 51, N2 = 51, M = 101 )
C   DIMENSION A(17*N1*N2), X1(N1), X2(N2)
C   COMMON / SB5 / IDEFAULT(4)
C   COMMON / CONTROL / IREPТ, NITER
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   X1L, X2L - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО УГЛА;
C   X1R, X2R - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО УГЛА;
C   N1, N2   - ЧИСЛО УЗЛОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКИ;
C   H1, H2   - ШАГИ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TAU      - ШАГ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   UO(N1,N2) - ВОССТАНАВЛИВАЕМОЕ НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ;
C   UT(N1,N2) - РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ;
C   UTD(N1,N2) - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ;
C   U(N1,N2)  - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C   EPSR      - ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C   EPSA      - АБСОЛЮТНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   EQUIVALENCE (A(1),      AO      ),
C   *             (A(N+1),    A1      ),
C   *             (A(2*N+1),  A2      ),
C   *             (A(9*N+1),   F       ),
C   *             (A(10*N+1),  UO      ),
C   *             (A(11*N+1),  UT      ),
C   *             (A(12*N+1),  UTD     ),
C   *             (A(13*N+1),  U       ),
C   *             (A(14*N+1),  V       ),
C   *             (A(15*N+1),  R       ),
C   *             (A(16*N+1),  BW      )
C
C   X1L = 0.0D0
C   X1R = 1.0D0
C   X2L = 0.0D0

```

```

X2R = 1.DO
TMAX = 0.025D0
PI = 3.1415926D0
EPSR = 1.D-5
EPSA = 1.D-8
C
OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C
C СЕТКА
C
H1 = (X1R-X1L) / (N1-1)
H2 = (X2R-X2L) / (N2-1)
TAU = TMAX / (M-1)
DO I = 1, N1
    X1(I) = X1L + (I-1)*H1
END DO
DO J = 1, N2
    X2(J) = X2L + (J-1)*H2
END DO
C
N = N1*N2
DO I = 1, 17*N
    A(I) = 0.0
END DO
C
C ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C ЧИСТО НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
C
C НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
T = 0.DO
CALL INIT ( A(10*N+1), X1, X2, N1, N2 )
DO K = 2, M
C
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
    CALL FDST ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+             H1, H2, N1, N2, TAU )
C
C РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
    IDEFAULT(1) = 0
    IREPT = 0
    CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
END DO
C
C ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
DO I = 1, N
    A(11*N+I) = A(10*N+I)
    A(12*N+I) = A(11*N+I) + 2.*DELTA*(RAND(O)-0.5)
END DO
C

```

```

C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД
C
      IT = 0

C
C   НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
      DO I = 1, N
          A(14*N+I) = 0.DO
      END DO

C
100  IT = IT + 1
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
      T = 0.DO

C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      DO I = 1, N
          A(10*N+I) = A(14*N+I)
      END DO
      DO K = 2, M

C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      CALL FDST ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+              H1, H2, N1, N2, TAU )

C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT      = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
      END DO

C
C   НЕВЯЗКА
C
      DO I = 1, N
          A(15*N+I) = A(10*N+I) - A(12*N+I)
      END DO

C
C   ПОПРАВКА
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      CALL FDSB ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(15*N+1),
+              H1, H2, N1, N2 )

C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0

```

```

IREPT = 0
CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(13*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
C
C ИТЕРАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ
C
T = 0.DO
C
C НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
DO I = 1, N
  A(10*N+I) = A(13*N+I)
END DO
DO K = 2, M
C
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
  CALL FDST ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+           H1, H2, N1, N2, TAU )
C
C РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
  IDEFAULT(1) = 0
  IREPT      = 0
  CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
END DO
C
C МЕТОД МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК
C
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
  CALL FDSB ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+           H1, H2, N1, N2 )
C
C РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
  IDEFAULT(1) = 0
  IREPT      = 0
  CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(16*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
C
SUM = 0.DO
SUM1 = 0.DO
DO I = 1, N
  SUM = SUM + A(10*N+I)*A(13*N+I)
  SUM1 = SUM1 + A(16*N+I)*A(10*N+I)
END DO
SS = SUM / SUM1
C
C НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
DO I = 1, N
  A(14*N+I) = A(14*N+I) - SS*A(13*N+I)
END DO
C

```

```

C      ВЫХОД ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПО НЕВЯЗКЕ
C
      SUM = 0.DO
      DO I = 1, N
          SUM = SUM + A(15*N+I)**2*H1*H2
      END DO
      SL2 = DSQRT(SUM)
      IF (SL2.GT.DELTA) GO TO 100
C
C      РЕШЕНИЕ
C
      DO I = 1, N
          A(13*N+I) = A(14*N+I)
      END DO
      WRITE ( 01, * ) (A(11*N+I), I=1,N)
      WRITE ( 01, * ) (A(13*N+I), I=1,N)
      CLOSE ( 01 )
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE INIT ( U, X1, X2, N1, N2)
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION U(N1,N2), X1(N1), X2(N2)
      DO I = 1, N1
          DO J = 1, N2
              U(I,J) = 0.DO
              IF ((X1(I)-0.6D0)**2 + (X2(J)-0.6D0)**2.LE.0.04D0)
+
                  U(I,J) = 1.DO
          END DO
      END DO
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE FDST ( A0, A1, A2, F, U, H1, H2, N1, N2, TAU )
C
C      ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C      ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
C      ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧИСТО НЕЯВНОЙ СХЕМЫ
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION A0(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2), F(N1,N2), U(N1,N2)
C
      DO J = 2, N2-1
          DO I = 2, N1-1
              A1(I-1,J) = 1.DO/(H1*H1)
              A1(I,J)   = 1.DO/(H1*H1)
              A2(I,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
              A2(I,J)   = 1.DO/(H2*H2)
              A0(I,J)   = A1(I-1,J) + A1(I,J) + A2(I,J) + A2(I,J-1)
          END DO
      END DO

```

```
+          + 1.DO/TAU
  F(I,J) = U(I,J)/TAU
  END DO
END DO
C
C      ОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
C
DO J = 2, N2-1
  AO(1,J) = 1.DO
  A1(1,J) = 0.DO
  A2(1,J) = 0.DO
  F(1,J) = 0.DO
END DO
C
DO J = 2, N2-1
  AO(N1,J) = 1.DO
  A1(N1-1,J) = 0.DO
  A1(N1,J) = 0.DO
  A2(N1,J) = 0.DO
  F(N1,J) = 0.DO
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  AO(I,1) = 1.DO
  A1(I,1) = 0.DO
  A2(I,1) = 0.DO
  F(I,1) = 0.DO
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  AO(I,N2) = 1.DO
  A1(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2-1) = 0.DO
  F(I,N2) = 0.DO
END DO
C
  AO(1,1) = 1.DO
  A1(1,1) = 0.DO
  A2(1,1) = 0.DO
  F(1,1) = 0.DO
C
  AO(N1,1) = 1.DO
  A2(N1,1) = 0.DO
  F(N1,1) = 0.DO
C
  AO(1,N2) = 1.DO
  A1(1,N2) = 0.DO
  F(1,N2) = 0.DO
C
  AO(N1,N2) = 1.DO
  F(N1,N2) = 0.DO
C
```



```

RETURN
END
C
SUBROUTINE FDSB ( A0, A1, A2, F, U, H1, H2, N1, N2 )
C
C   ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ДЛЯ СЕТОЧНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
C
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION A0(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2), F(N1,N2), U(N1,N2)
C
DO J = 2, N2-1
  DO I = 2, N1-1
    A1(I-1,J) = 1.DO/(H1*H1)
    A1(I,J)   = 1.DO/(H1*H1)
    A2(I,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
    A2(I,J)   = 1.DO/(H2*H2)
    A0(I,J)   = A1(I,J) + A1(I-1,J) + A2(I,J) + A2(I,J-1)
  +
  F(I,J)     = U(I,J)
  END DO
END DO
C
C   ОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
C
DO J = 2, N2-1
  A0(1,J) = 1.DO
  A1(1,J) = 0.DO
  A2(1,J) = 0.DO
  F(1,J)  = 0.DO
END DO
C
DO J = 2, N2-1
  A0(N1,J) = 1.DO
  A1(N1-1,J) = 0.DO
  A1(N1,J) = 0.DO
  A2(N1,J) = 0.DO
  F(N1,J)  = 0.DO
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  A0(I,1) = 1.DO
  A1(I,1) = 0.DO
  A2(I,1) = 0.DO
  F(I,1)  = 0.DO
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  A0(I,N2) = 1.DO
  A1(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2-1) = 0.DO
  F(I,N2)  = 0.DO

```

```

      END DO
C
      A0(1,1) = 1.DO
      A1(1,1) = 0.DO
      A2(1,1) = 0.DO
      F(1,1)  = 0.DO
C
      A0(N1,1) = 1.DO
      A2(N1,1) = 0.DO
      F(N1,1)  = 0.DO
C
      A0(1,N2) = 1.DO
      A1(1,N2) = 0.DO
      F(1,N2)  = 0.DO
C
      A0(N1,N2) = 1.DO
      F(N1,N2)  = 0.DO
C
      RETURN
      END

```

В подпрограмме FDST формируются коэффициенты сеточной эллиптической задачи, которая решается на новом шаге по времени. В подпрограмме FDSB задаются коэффициенты сеточного эллиптического оператора  $B$  в итерационном процессе (7.179), причем

$$By = - \sum_{\beta=1}^2 y_{\bar{x}_{\beta} x_{\beta}} + y.$$

Для решения сеточных эллиптических задач используется подпрограмма SBAND5.

### 7.3.5. Результаты расчетов

Как и при рассмотрении регуляризованных разностных схем для приближенного решения задачи с обратным временем использовалась равномерная сетка с  $h_1 = 0,02$ ,  $h_2 = 0,02$  для модельной задачи с  $k(\mathbf{x}) = 1$  в единичном квадрате. В рамках квазиреального эксперимента решается прямая задача при  $T = 0,025$ , при использовании сетки по времени с  $\tau = 0,00025$ . Использовалась чисто неявная разностная схема ( $\sigma = 1$ ). Для прямой задачи начальное условие (точное решение обратной задачи на конечный момент времени) снова задается в виде

$$u_0(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1, & (x_1 - 0,6)^2 + (x_2 - 0,6)^2 \leq 0,04, \\ 0, & (x_1 - 0,6)^2 + (x_2 - 0,6)^2 > 0,04. \end{cases}$$

Решение прямой задачи на конечный момент времени показано на рис. 7.5.

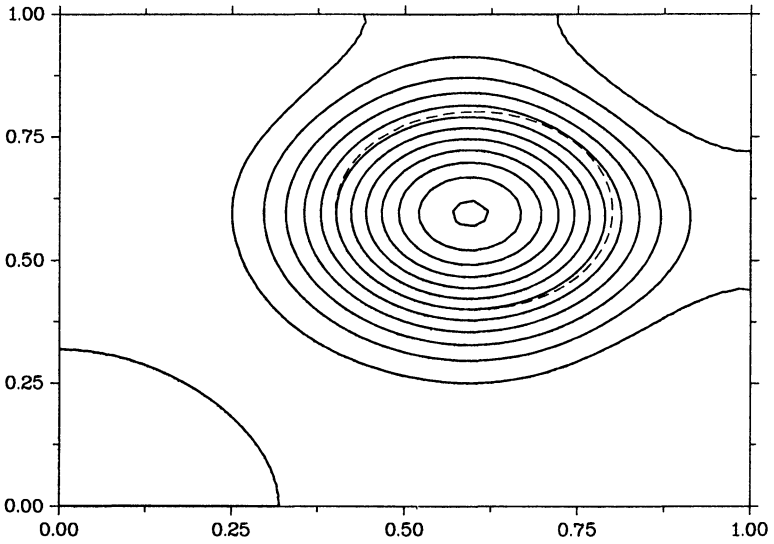


Рис. 7.9. Решение обратной задачи при  $\epsilon = 0,001$

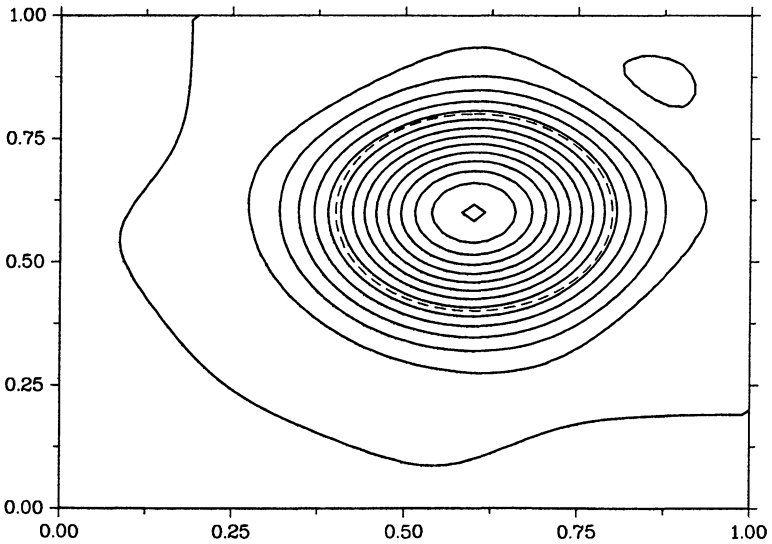


Рис. 7.10. Решение обратной задачи при  $\epsilon = 0,0001$

Для иллюстрации возможностей по восстановлению кусочно-разрывного начального условия приведем данные расчетов при невозмущенных входных данных (разностном решении прямой задачи при  $t = T$ ). Итерационный процесс прерывался при достижении невязкой  $r_k = Av_k - \varphi$  оценки  $\|r_k\| \leq \varepsilon$ . Приближенное решение при  $\varepsilon = 0,001$  и  $\varepsilon = 0,0001$  показано на рис. 7.9 и 7.10 соответственно (нарисованы изолинии с шагом  $\Delta u = 0,05$ ). Существенное (в 10 раз) изменение в точности решения обратной задачи приводит к небольшому уточнению приближенного решения. В рассматриваемом примере мы не можем рассчитывать на более точное воспроизведение кусочно-разрывного начального условия.

При возмущении входных данных необходимо ориентироваться на выделение гладкого начального решения обратной задачи с помощью выбора оператора  $B \neq E$  в итерационном процессе (7.179). На рис. 7.11 (с. 336) представлено решение обратной задачи при погрешностях  $\delta = 0,01$ . Решение задачи при большем и меньшем уровне погрешностей иллюстрируется рис. 7.12, 7.13 (с. 336, 337).

## 7.4. Эволюционное уравнение второго порядка

Классическим примером некорректной задачи является задача Коши для эллиптического уравнения (пример Адамара). Рассматриваются основные возможности по построению устойчивых алгоритмов решения такого типа эволюционных обратных задач. Кратко обсуждаются методы с возмущением начальных условий и исходного эволюционного уравнения второго порядка, представлена программа, в которой для приближенного решения задачи Коши для уравнения Лапласа используются регуляризованные разностные схемы.

### 7.4.1. Модельная задача

Будем рассматривать простейшую обратную задачу для двумерного уравнения Лапласа. Начнем с формулировки прямой задачи. В прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \quad (7.180)$$

Дополним это уравнение некоторыми граничными условиями. На боковых частях границы положим

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T. \quad (7.181)$$

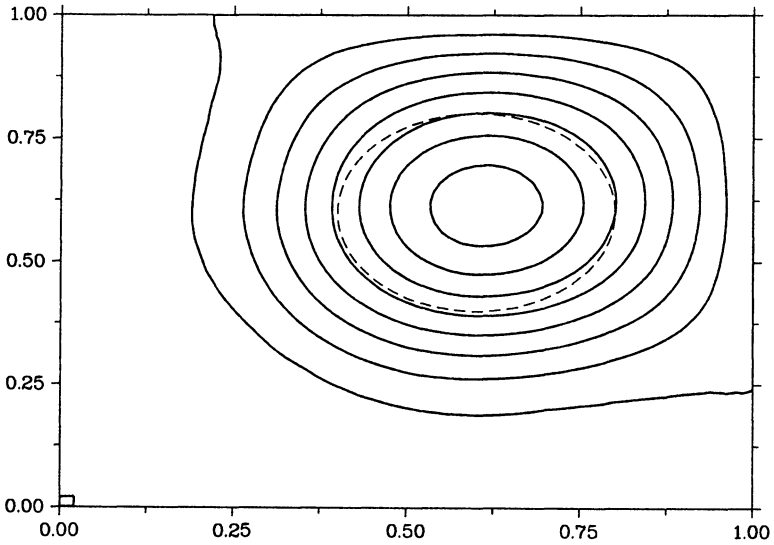


Рис. 7.11. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

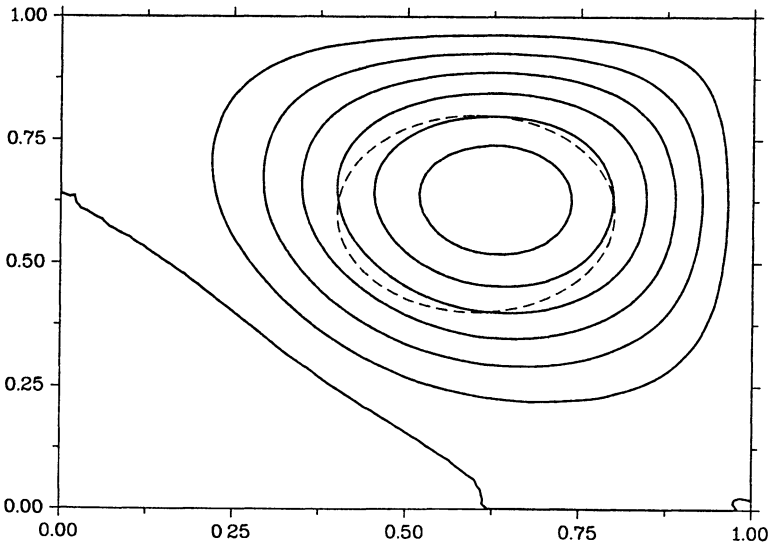


Рис. 7.12. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,02$

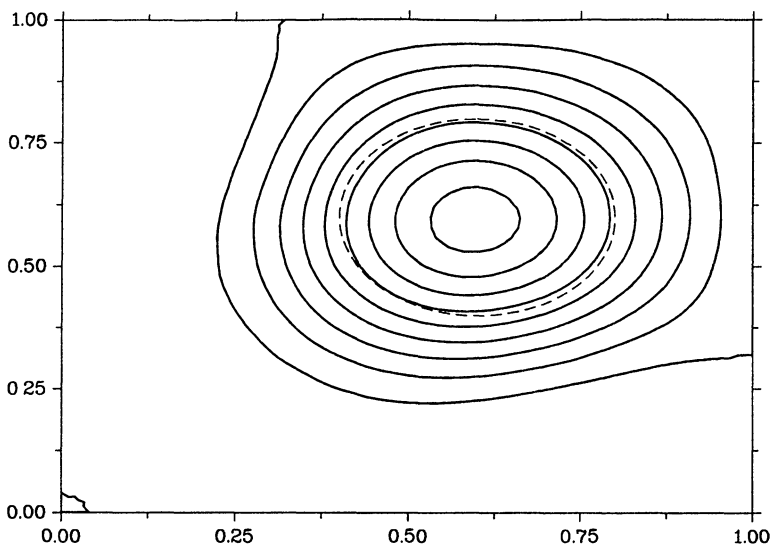


Рис. 7.13. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$

На верхнем и нижнем основаниях считаем заданными граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7.182)$$

$$u(x, T) = u_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (7.183)$$

Среди обратных эволюционных задач для уравнения (7.180) можно выделить задачу Коши и задачу продолжения решения краевой задачи. Задача Коши формулируется следующим образом. Пусть граничное условие при  $t = T$  не задано, но известно решение при  $t = 0$ , т. е. вместо (7.183) задано условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (7.184)$$

При решении практических задач интерес может представить и задача продолжения решения прямой задачи (7.180)–(7.183) за границу расчетной области. Например, нас интересует решение  $u(x, t)$  в области  $\bar{Q}_{T+\Delta T}$  при  $\Delta T > 0$ , т. е. решение продолжается в область, прилегающую к верхнему участку границы. Задача продолжения после решения задачи внутри расчетной области  $\bar{Q}_T$  сводится к задаче Коши типа (7.180)–(7.182), (7.184). Интерес представляет также и возможность перехода от задачи Коши к задаче продолжения. С учетом этого замечания в дальнейшем мы сосредоточимся на задаче Коши.

Задачу (7.180)–(7.182), (7.184) будем рассматривать с несколько более общих позиций как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Для функций, заданных в  $\Omega = (0, 1)$ , определим обычным образом гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$ . На множестве функций, обращающихся в нуль на  $\partial\Omega$ , определим оператор

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l. \quad (7.185)$$

Среди основных свойств этого оператора отметим, что в  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \geq mE, \quad m > 0. \quad (7.186)$$

Уравнение (7.180), дополненное условиями (7.181) на границе, записывается как дифференциально-операторное уравнение для нахождения  $u(t) \in \mathcal{H}$ :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \mathcal{A}u = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (7.187)$$

Начальные условия (7.182) и (7.184) дают

$$u(0) = u_0, \quad (7.188)$$

$$\frac{du}{dt}(0) = 0. \quad (7.189)$$

В (7.187) оператор  $\mathcal{A}$  самосопряжен и положительно определен. Некорректность задачи (7.187)–(7.189) обусловлена отсутствием непрерывной зависимости от входных данных (начальных условий). Условная корректность имеет место в классе ограниченных в  $\mathcal{H}$  решений.

### 7.4.2. Эквивалентное уравнение первого порядка

При построении регуляризирующих алгоритмов для приближенного решения задачи (7.187)–(7.189) может оказаться полезным переход к задаче Коши для эволюционного уравнения первого порядка. В этом случае мы можем ориентироваться на использование ранее рассмотренных подходов к решению некорректных задач для эволюционных уравнений, связанных с возмущением начальных условий и (или) самого уравнения.

Простейшее преобразование, связанное с обычным введением вектора неизвестных  $U = \{u_1, u_2\}$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = du/dt$  приводит к системе уравнений первого порядка с несамосопряженным оператором. Такой подход более подробно обсуждается ниже.

Для задачи (7.187)–(7.189) можно учесть самосопряженность и положительность оператора  $\mathcal{A}$ . Сделаем замену переменных

$$v(t) = \frac{1}{2} \left( u - \mathcal{A}^{-1/2} \frac{du}{dt} \right), \quad w(t) = \frac{1}{2} \left( u + \mathcal{A}^{-1/2} \frac{du}{dt} \right). \quad (7.190)$$

Тогда из (7.187) следует, что новые неизвестные  $v(t)$  и  $w(t)$  удовлетворяют уравнениям первого порядка:

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{A}^{1/2}v = 0, \quad \frac{dw}{dt} - \mathcal{A}^{1/2}w = 0. \quad (7.191)$$

С учетом (7.188), (7.189) и введенных обозначений (7.190) для уравнений (7.191) ставятся начальные условия

$$v(0) = \frac{1}{2}u_0, \quad w(0) = \frac{1}{2}u_0. \quad (7.192)$$

Таким образом, от некорректной задачи (7.187)–(7.189) мы приходим к корректной задаче для определения  $v(t)$  и некорректной задаче для  $w(t)$ . Поэтому регуляризирующие алгоритмы для задачи (7.187)–(7.189) могут строиться на основе регуляризации расщепленной системы уравнений (7.191). Ниже при рассмотрении метода квазиобращения для задачи (7.187)–(7.189) мы отметим некоторые возможности в этом направлении. В плане практической реализации естественно ориентироваться на варианты возмущения, которые не связаны с вычислением квадратного корня оператора  $\mathcal{A}$ .

Определим вектор  $U = \{u_1, u_2\}$  и пространство  $\mathcal{H}^2$  как прямую сумму пространств  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Сложение в  $\mathcal{H}^2$  проводится по координатам, а скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(U, V) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

Пусть  $u_1 = v$ ,  $u_2 = w$ , тогда система уравнений (7.191) принимает вид

$$\frac{dU}{dt} - \mathcal{L}U = 0, \quad (7.193)$$

где

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\mathcal{A}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (7.194)$$

Уравнение (7.194) дополняется начальным условием (см. (7.192))

$$U(0) = U_0, \quad U_0 = \left\{ \frac{1}{2}u_0, \frac{1}{2}u_0 \right\}. \quad (7.195)$$

Задача (7.193), (7.195) принадлежит к рассмотренному ранее классу некорректных задач для уравнений первого порядка. Особенность задачи обусловлена тем, что оператор  $\mathcal{L}$  (см. (7.194)) не знакоопределен.

Отметим некоторые возможности перехода к эквивалентной системе уравнений первого порядка в более общих условиях, когда, например,



оператор  $\mathcal{A}$  несамосопряжен. Пусть компоненты вектора  $U = \{u_1, u_2\}$  из  $\mathcal{H}^2$  определяются следующим образом:

$$u_1 = u, \quad u_2 = \frac{du}{dt}. \quad (7.196)$$

Тогда исходная задача (7.187)–(7.189) записывается в виде (ср. с (7.193)–(7.195)) уравнения (7.193), которое дополняется начальным условием

$$U(0) = U_0, \quad U_0 = \{u_0, 0\}. \quad (7.197)$$

Для оператора  $\mathcal{L}$  получим представление

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.198)$$

Тем самым от задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка мы снова перешли к задаче Коши для эволюционного уравнения первого порядка.

### 7.4.3. Возмущение начальных условий

Дадим краткую характеристику возможностей использования методов, основанных на нелокальном возмущении начальных условий, для приближенного решения некорректной задачи Коши для эволюционных уравнений второго порядка. При ориентации на общие задачи требуется, вообще говоря, возмущение двух начальных условий. Пусть вначале ставится некорректная задача определения  $u = u(t) \in \mathcal{H}$  из уравнения (7.187), дополненного начальными условиями (7.188), (7.189).

Приближенное решение  $u_\alpha(t)$  определяется как решение следующей нелокальной задачи:

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.199)$$

$$u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T) = u_0, \quad (7.200)$$

$$\frac{du_\alpha}{dt}(0) = 0. \quad (7.201)$$

Нелокальная задача (7.199)–(7.201) характеризуется тем, что возмущается только одно начальное условие (см. (7.200)). Оценка устойчивости дается следующим утверждением.

**Теорема 7.14.** *Для решения нелокальной задачи (7.199)–(7.201) имеет место оценка*

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|u_0\|. \quad (7.202)$$

*Доказательство.* Решение задачи (7.199)–(7.201) записывается в обычном операторном виде

$$u_\alpha(t) = R(t, \alpha)u_0 \quad (7.203)$$

при

$$R(t, \alpha) = \text{ch}(\mathcal{A}^{1/2}t)(E + \alpha \text{ch}(\mathcal{A}^{1/2}T))^{-1}. \quad (7.204)$$

Считаем, что спектр оператора  $\mathcal{A}$  дискретный и состоит из собственных значений  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ , а соответствующая система собственных функций  $\{w_k\}$ ,  $w_k \in D(\mathcal{A})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ортонормирована и полна в  $\mathcal{H}$ . В этих условиях для решения задачи (7.199)–(7.201) имеем представление

$$u_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, w_k) \text{ch}(\lambda_k^{1/2}t) (1 + \alpha \text{ch}(\lambda_k^{1/2}T))^{-1} w_k.$$

Отсюда и следует оценка устойчивости (7.202). ■

Можно установить регуляризирующие свойства рассматриваемого алгоритма возмущения начального условия, полностью аналогичные случаю уравнения первого порядка (см. теорему 7.2). Пусть вместо точного начального условия  $u_0$  задано приближенное  $u_0^\delta$ . Как обычно считаем, что имеется оценка погрешности вида

$$\|u_0^\delta - u_0\| \leq \delta. \quad (7.205)$$

Приближенное решение, соответствующее неточным начальным условиям, определяется из уравнения (7.199), условия (7.201) и нелокального условия

$$u_\alpha(0) + \alpha u_\alpha(T) = u_0^\delta. \quad (7.206)$$

**Теорема 7.15.** *При выполнении (7.205) решение задачи (7.199), (7.201), (7.206) сходится к ограниченному в  $\mathcal{H}$  решению задачи (7.187)–(7.189), если  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta/\alpha \rightarrow 0$ .*

Покажем связь нелокальной задачи (7.199)–(7.201) с некоторой задачей оптимального управления. Здесь решение задачи оптимального управления, как и нелокальной задачи, мы получаем на основе использования метода разделения переменных.

Пусть  $v \in \mathcal{H}$  — искомое управление, и  $u_\alpha(t; v)$  определяется как решение задачи:

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.207)$$

$$u_\alpha(T; v) = v, \quad (7.208)$$

$$\frac{du_\alpha}{dt}(0) = 0. \quad (7.209)$$

Функционал качества возьмем в простейшем виде:

$$J_\alpha(v) = \|u_\alpha(0; v) - u_0\|^2 + \alpha \|v\|^2. \quad (7.210)$$

Оптимальное управление  $w$  соответствует

$$J_\alpha(w) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_\alpha(v). \quad (7.211)$$

Решение задачи оптимального управления (7.207)–(7.211) записывается в виде (7.203) при

$$R(t, \alpha) = \operatorname{ch}(\mathcal{A}^{1/2}t) (E + \alpha \operatorname{ch}^2(\mathcal{A}^{1/2}T))^{-1}. \quad (7.212)$$

Сравнивая (7.204) и (7.212), можно установить следующее утверждение.

**Теорема 7.16.** *Решение задачи оптимального управления (7.207)–(7.211) совпадает с решением нелокальной задачи для уравнения (7.199) на удвоенном интервале  $(0, 2T)$  с начальным условием (7.201) и нелокальным*

$$u_\alpha(0) + \frac{\alpha}{2 + \alpha} u_\alpha(2T) = \frac{2}{2 + \alpha} u_0. \quad (7.213)$$

*Доказательство.* Для получения (7.213) используется представление решения в виде (7.212) с учетом формулы  $2 \operatorname{ch}^2(x) = \operatorname{ch}(2x) + 1$ . ■

Некоторые другие нелокальные условия можно получить, ориентируясь на запись рассматриваемой задачи Коши (7.187)–(7.189) в виде задачи Коши для эволюционного уравнения первого порядка. Примером является задача (7.193)–(7.195).

Приближенное решение задачи (7.193)–(7.195) будем определять как решение нелокальной задачи

$$\frac{dU_\alpha}{dt} - \mathcal{L}U_\alpha = 0, \quad (7.214)$$

$$U_\alpha(0) + \alpha U_\alpha(T) = U_0. \quad (7.215)$$

Для того чтобы сформулировать соответствующую нелокальную задачу для уравнения второго порядка, совершим в задаче (7.214), (7.215) обратный переход. По аналогии с (7.190) решение системы уравнений (7.214) представим в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2} \left( u_\alpha - \mathcal{A}^{-1/2} \frac{du_\alpha}{dt} \right), \\ u_2(t) &= \frac{1}{2} \left( u_\alpha + \mathcal{A}^{-1/2} \frac{du_\alpha}{dt} \right). \end{aligned} \quad (7.216)$$

Из (7.216) вытекает

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= u_1(t) + u_2(t), \\ \frac{du_\alpha}{dt}(t) &= \mathcal{A}^{-1/2}(u_2(t) - u_1(t)). \end{aligned} \quad (7.217)$$

Тогда нелокальное условие (7.215) с учетом (7.195) дает

$$\begin{aligned} u_1(0) + \alpha u_1(T) &= \frac{1}{2}u_0, \\ u_2(0) + \alpha u_2(T) &= \frac{1}{2}u_0. \end{aligned} \quad (7.218)$$

Принимая во внимание (7.216), (7.217), из (7.218) получим

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) + \alpha u_\alpha(T) &= u_0, \\ \frac{du_\alpha}{dt}(0) + \frac{du_\alpha}{dt}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (7.219)$$

Приходим к двум нелокальным условиям для решения  $u_\alpha(t)$  уравнения (7.199). В этом случае (ср. с (7.200), (7.201)) проводится нелокальное возмущение не одного, а двух начальных условий.

#### 7.4.4. Возмущение уравнения

Отметим возможности построения регуляризирующих алгоритмов решения эволюционных обратных задач для уравнения второго порядка на основе возмущения исходного уравнения. При этом мы можем ориентироваться на ранее рассмотренные варианты метода квазиобращения для эволюционных уравнений первого порядка.

Для приближенного решения задачи (7.187)–(7.189) будем использовать вариант метода квазиобращения, аналогичный основному варианту метода квазиобращения для уравнений первого порядка. Приближенное решение  $u_\alpha(t)$  определяется из уравнения

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha + \alpha \mathcal{A}^2 u_\alpha = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (7.220)$$

Начальные условия задаются неточно. Пусть

$$u_\alpha(0) = u_0^\delta, \quad (7.221)$$

$$\frac{du_\alpha}{dt}(0) = 0. \quad (7.222)$$

Считаем, что для погрешности в начальном условии справедлива оценка (7.205).

Решение задачи (7.220)–(7.222) записывается в операторном виде:

$$u_\alpha(t) = R(t, \alpha)u_0^\delta. \quad (7.223)$$

где

$$R(t, \alpha) = \operatorname{ch}((\mathcal{A} - \alpha\mathcal{A}^2)^{1/2}t).$$

На основе метода разделения переменных доказывается сходимость приближенного решения к точному.

**Теорема 7.17.** Пусть для погрешности начального условия выполнена оценка (7.205). Тогда приближенное решение  $u_\alpha(t)$ , определяемое как решение задачи (7.220)–(7.222), при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ ,  $\delta \exp\{T/(4\alpha)^{1/2}\} \rightarrow 0$  сходится к ограниченному в  $\mathcal{H}$  точному решению  $u(t)$  задачи (7.187)–(7.189) и справедлива оценка устойчивости по начальным данным

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2\sqrt{\alpha}}\right)\|u_\alpha(0)\|. \quad (7.224)$$

*Доказательство.* Для того чтобы установить сформулированные утверждения, в частности, показать справедливость оценки (7.224), можно опираться на схему доказательства соответствующих результатов для уравнения первого порядка (см., например, теорему 7.9). ■

Вариант метода квазиобращения для уравнения (7.187), аналогичный псевдопараболическому возмущению уравнения первого порядка, состоит в определении приближенного решения из уравнения

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha + \alpha\mathcal{A}\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.225)$$

дополненного начальными условиями (7.221), (7.222).

Приближенное решение сходится к точному при согласовании параметра регуляризации с погрешностью входных данных, и для решения задачи (7.221), (7.222), (7.225) справедлива оценка устойчивости по начальным данным

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right)\|u_\alpha(0)\|. \quad (7.226)$$

Варианты метода квазиобращения для приближенного решения некорректной задачи Коши (7.187)–(7.189) можно строить на основе перехода к эквивалентной задаче Коши для системы уравнений первого порядка. Вместо (7.187)–(7.189) рассмотрим задачу (7.193)–(7.195), в которой

$$\begin{aligned} u_1(t) = v(t) &= \frac{1}{2}\left(u - \mathcal{A}^{-1/2}\frac{du}{dt}\right), \\ u_2(t) = w(t) &= \frac{1}{2}\left(u + \mathcal{A}^{-1/2}\frac{du}{dt}\right). \end{aligned} \quad (7.227)$$

С учетом того, что оператор  $\mathcal{L}$  самосопряжен и не знакоопределен, приближенное решение  $U_\alpha(t)$  задачи (7.193), (7.195) определим из уравнения

$$\frac{dU_\alpha}{dt} - \mathcal{L}U_\alpha + \alpha\mathcal{L}^2U_\alpha = 0 \quad (7.228)$$

и начальных условий

$$U_\alpha(0) = U_0. \quad (7.229)$$

На основе ранее полученных результатов (см. теорему 7.8) получим следующее оценку устойчивости приближенного решения  $U_\alpha(t)$  по начальным данным.

$$\|U_\alpha(t)\| \leq \exp\{t/(4\alpha)\} \|U_\alpha(0)\|. \quad (7.230)$$

Получим уравнение для определения приближенного решения  $u_\alpha(t)$ , соответствующее системе уравнений (7.228). Принимая во внимание (7.194), имеем

$$\mathcal{L}^2 = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix}.$$

С учетом (7.228) для  $v_\alpha(t)$ ,  $w_\alpha(t)$  (при  $U_\alpha = \{v_\alpha, w_\alpha\}$ ) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dv_\alpha}{dt} + \mathcal{A}^{1/2}v_\alpha + \alpha\mathcal{A}v_\alpha &= 0, \\ \frac{dw_\alpha}{dt} - \mathcal{A}^{1/2}w_\alpha + \alpha\mathcal{A}w_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (7.231)$$

Приближенное решение  $u_\alpha(t)$  по аналогии с точным решением  $u(t)$  (см. (7.227)) определим равенством

$$u_\alpha(t) = v_\alpha(t) + w_\alpha(t). \quad (7.232)$$

Из (7.231), (7.232) непосредственно следует, что  $u_\alpha(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha + 2\alpha\mathcal{A}\frac{du_\alpha}{dt} + \alpha^2\mathcal{A}^2u_\alpha = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (7.233)$$

Принимая во внимание (7.232), для решения уравнения (7.233) с соответствующими начальными условиями получим

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|^2 &\leq (\|v_\alpha\| + \|w_\alpha\|)^2 \leq 2(\|v_\alpha\|^2 + \|w_\alpha\|^2) = 2\|U_\alpha\|^2 \leq \\ &\leq 2 \exp\{t/(2\alpha)\} \|U_\alpha(0)\|^2 \leq \exp\{t/(2\alpha)\} \|u_\alpha(0)\|^2. \end{aligned}$$

Конечно, эта же оценка может быть получена на основе соответствующих оценок для  $v_\alpha(t)$  и  $w_\alpha(t)$ , определяемых из уравнений (7.231).

Уравнение (7.233) получено за счет двух возмущающих слагаемых. Регуляризация за счет одного из них ( $\alpha^2 \mathcal{A}^2 u_\alpha$ ) нами уже рассматривалась (см. уравнение (7.220)). Представляет интерес рассмотреть в чистом виде регуляризацию за счет второго слагаемого. В этом случае приближенное решение ищется из уравнения (см. (7.233))

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha + \alpha \mathcal{A} \frac{du_\alpha}{dt} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (7.234)$$

дополненного начальными условиями (7.221), (7.222). Такая регуляризация при рассмотрении корректных задач для эволюционных уравнений носит название «параболической» регуляризации.

Аналогично теореме 7.17 доказывается соответствующее утверждение о регуляризирующих свойствах метода квазиобращения в варианте «параболической» регуляризации. Мы приведем лишь оценку устойчивости по начальным данным:

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \exp\{t/\alpha\} \|u_\alpha(0)\|.$$

Мы ограничились применением метода квазиобращения в стандартном варианте (7.228), (7.229) для задачи (7.193)–(7.195). Определенные возможности предоставляет также использование варианта псевдопараболического возмущения уравнения (7.193).

#### 7.4.5. Регуляризованные разностные схемы

Обратимся теперь к построению регуляризованных разностных схем при приближенном решении некорректной задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка.

Введем равномерную сетку с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\},$$

причем  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Во внутренних узлах дифференциальный оператор (7.185) аппроксимируем со вторым порядком разностным оператором

$$\Lambda y = -y_{\bar{x}x}, \quad x \in \omega. \quad (7.235)$$

В сеточном гильбертовом пространстве  $H$  норму введем соотношением  $\|y\| = (y, y)^{1/2}$ , где

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h.$$

На множестве функций, обращающихся в нуль на  $\partial\omega$ , для самосопряженного оператора  $\Lambda$  верна оценка

$$\Lambda = \Lambda^* \geq \lambda_0 E, \quad (7.236)$$

в которой

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geq \frac{8}{l^2}.$$

После аппроксимации по пространству задаче (7.187)–(7.189) ставится в соответствие задача

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \Lambda y = 0, \quad x \in \omega, \quad t > 0, \quad (7.237)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \omega, \quad (7.238)$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = 0, \quad x \in \omega. \quad (7.239)$$

Регуляризованные разностные схемы для задачи (7.237)–(7.239) строятся на основе принципа регуляризации разностных схем. В качестве производящей (исходной) возьмем явную симметричную разностную схему

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda y_n = 0, \quad x \in \omega, \quad n = 1, 2, \dots, N_0 - 1 \quad (7.240)$$

с некоторыми начальными условиями.

С учетом (7.238) имеем

$$y_0 = u_0(x), \quad x \in \omega.$$

Решение на момент времени  $t = \tau$  аппроксимируется при (7.238), (7.239) на решениях уравнения (7.237). Принимая во внимание, что

$$y_1 = y_0 + \tau \frac{dy}{dt}(0) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 y}{dt^2}(0) + O(\tau^3),$$

для аппроксимации (7.239) воспользуемся разностным соотношением

$$\frac{y_1 - y_0}{\tau} + \frac{\tau}{2} \Lambda y_0 = 0.$$

Схема (7.240) записывается в каноническом виде трехслойных разностных схем

$$B \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + R(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + Ay_n = 0 \quad (7.241)$$

с операторами

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E, \quad A = -\Lambda, \quad (7.242)$$

т.е. при  $A = A^* < 0$ .

**Теорема 7.18.** Явная схема (7.240)  $\rho$ -устойчива с

$$\rho = \exp \{M^{1/2} \tau\}. \quad (7.243)$$



*Доказательство.* Проверим выполнение условий  $\rho$ -устойчивости (см. теорему 4.10)

$$\frac{\rho^2 + 1}{2}B + \tau(\rho^2 - 1)R \geq 0, \quad (7.244)$$

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau}B + (\rho - 1)^2R + \rho A > 0, \quad (7.245)$$

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau}B + (\rho + 1)^2R - \rho A > 0 \quad (7.246)$$

для схемы (7.240). При  $B \geq 0$ ,  $A \leq 0$ ,  $R \geq 0$  и  $\rho > 1$  (см. (7.242)) неравенства (7.244), (7.246) при всех  $\tau > 0$  с очевидностью выполняются. Неравенство (7.245) при учете (7.242) дает

$$(\rho - 1)^2E - \tau^2\rho\Lambda \geq ((\rho - 1)^2M^{-1} - \tau^2\rho)\Lambda > 0.$$

Получение оценок базируется на следующем полезном результате.

**Лемма 7.1.** *Неравенство*

$$(\rho - 1)^2\chi - \tau^2\rho > 0 \quad (7.247)$$

для положительных  $\chi$ ,  $\tau$  и  $\rho > 1$  выполнено при

$$\rho \geq \exp\{\chi^{-1/2}\tau\}.$$

*Доказательство.* Неравенство (7.247) будет выполнено для  $\rho > \rho_2$ , где

$$\rho_2 = 1 + \frac{1}{2}\tau^2\chi^{-1} + \tau\chi^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{4}\tau^2\chi^{-1}\right)^{1/2}.$$

Принимая во внимание

$$\left(1 + \frac{1}{4}\tau^2\chi^{-1}\right)^{1/2} < 1 + \frac{1}{8}\tau^2\chi^{-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \rho_2 &< 1 + \tau\chi^{-1/2} + \frac{1}{2}\tau^2\chi^{-1} + \frac{1}{8}\tau^3\chi^{-3/2} < \\ &< 1 + \tau\chi^{-1/2} + \frac{1}{2}\tau^2\chi^{-1} + \frac{1}{6}\tau^3\chi^{-3/2} < \exp\{\chi^{-1/2}\tau\}. \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана. ■

В нашем случае  $\chi = M^{-1}$ , и поэтому для  $\rho$  получим доказываемую оценку (6.18) для явной схемы (6.16). ■

С учетом ограниченности сеточного оператора  $\Lambda$  (при исследовании задачи Коши для эллиптических уравнений) можно заключить, что шаг сетки по пространству ограничивает рост решения, т. е. выступает в качестве параметра регуляризации.

Построим за счет введения регуляризирующих добавок в сеточные операторы разностной схемы безусловно устойчивые разностные схемы для приближенного решения задачи (7.237)–(7.239). Отталкиваясь от явной схемы (7.240), запишем регуляризованную схему в каноническом виде (7.241) с

$$B = 0, \quad R = \frac{1}{\tau^2}(E + \alpha G), \quad A = -\Lambda. \quad (7.248)$$

**Теорема 7.19.** *Регуляризованная схема (7.241), (7.248)  $\rho$ -устойчива при регуляризаторе  $G = \Lambda$  с*

$$\rho = \exp \{ \tau / \sqrt{\alpha} \}, \quad (7.249)$$

а при  $G = \Lambda^2$  с

$$\rho = \exp \left\{ \frac{\tau}{\sqrt{2\sqrt{\alpha}}} \right\}. \quad (7.250)$$

*Доказательство.* От (7.245) для (7.248) придем к неравенству

$$(\rho - 1)^2(E + \alpha G) - \tau^2 \rho \Lambda \geq 0. \quad (7.251)$$

При  $G = \Lambda$  аналогично доказательству теоремы 7.18 ( $\chi = \alpha + M^{-1}$ ) получим для  $\rho$  выражение

$$\rho = \exp \{ (\alpha + \|\Lambda\|^{-1})^{-1/2} \tau \}.$$

Загрубляя  $\rho$ , придем к оценке (7.249).

При  $G = \Lambda^2$  из неравенства (7.245) имеем

$$E + \alpha \Lambda^2 - \frac{\tau^2 \rho}{(\rho - 1)^2} \Lambda = \left( \sqrt{\alpha} \Lambda - \frac{\tau^2 \rho}{2\sqrt{\alpha}(\rho - 1)^2} E \right)^2 + \left( 1 - \frac{\tau^4 \rho^2}{4\alpha(\rho - 1)^4} \right) E.$$

Это неравенство будет выполнено при заданном  $\rho$ , если параметр регуляризации

$$\alpha \geq \frac{\tau^4 \rho^2}{4(\rho - 1)^4}. \quad (7.252)$$

Оценим теперь величину  $\rho$  при заданном  $\alpha$  из неравенства (7.252), которое перепишем в виде

$$(\rho - 1)^2 2\sqrt{\alpha} \geq \tau^2 \rho.$$

В силу леммы ( $\chi = 2\sqrt{\alpha}$ ) неравенство будет выполнено при значениях  $\rho$ , определяемых согласно (7.250). ■

Регуляризованная схема (7.241), (7.248) при регуляризаторе  $G = \Lambda$  записывается в виде схемы с весами

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - 2\sigma)y_n + \sigma y_{n-1}) = 0 \quad (7.253)$$

при выборе веса  $\sigma = -\alpha/\tau^2$ . Тем самым в качестве параметра регуляризации выступает отрицательный вес в схеме с весами (7.253). Эту схему можно связать также с вариантом метода квазиобращения (7.225) для приближенного решения некорректной задачи (7.187)–(7.189).

Построение регуляризованной разностной схемы базируется на таком возмущении операторов производящей разностной схемы (7.241), (7.242), чтобы выполнялось операторное неравенство (7.245). В теореме 7.19 это достигается за счет аддитивного возмущения (увеличения) оператора  $R$ . Есть масса других возможностей. В частности, отметим возможность аддитивного возмущения оператора  $B$ :

$$B = \alpha G, \quad R = \frac{1}{\tau^2} E, \quad A = -\Lambda. \quad (7.254)$$

**Теорема 7.20.** Регуляризованная схема (7.241), (7.254) при  $G = \Lambda$   $\rho$ -устойчива с

$$\rho = \exp \{t/\alpha\}. \quad (7.255)$$

*Доказательство.* Неравенство (7.245) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\rho^2 - 1}{2\tau} B + (\rho - 1)^2 R + \rho A > \frac{\rho^2 - 1}{2\tau} \alpha \Lambda - \rho \Lambda \geq 0.$$

Оно будет выполнено при  $\rho \geq \rho_2$ , где

$$\rho_2 = \frac{\tau}{\alpha} + \left(1 + \frac{\tau^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} < 1 + \frac{\tau}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{\alpha^2} < \exp \{t/\alpha\}.$$

Отсюда и следует выражение (7.255) для  $\rho$  в разностной схеме (7.241), (7.254). ■

Регуляризованная схема (7.241), (7.254) непосредственно связывается с использованием метода квазиобращения в варианте (7.234). Подобным образом строятся регуляризованные схемы, которые связываются с основным вариантом метода квазиобращения (7.225).

### 7.4.6. Программа

Мы не ставим своей целью проверку работоспособности всех отмеченных методов приближенного решения модельной задачи Коши для эллиптического уравнения (7.180)–(7.182), (7.184). В плане вычислительной реализации наиболее простой подход связан с использованием

регуляризованных схем типа (7.241), (7.248) (или (7.241), (7.254)) при регуляризаторе  $G = \Lambda$ .

В случае (7.241), (7.248) приближенное решение находится из разностного уравнения

$$(E + \alpha\Lambda) \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda y_n = 0,$$

а в случае (7.241), (7.254) — из

$$\alpha\Lambda \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda y_n = 0.$$

Для таких схем вычислительная реализация ненамного сложнее, чем для прямых задач.

В этом случае контролируется (ограничивается) рост нормы решения, что чаще всего недостаточно для получения удовлетворительного приближенного решения. Последнее обстоятельство связано с тем, что никакой дополнительной обработки приближенного решения с неточными входными данными, например, фильтрации высокочастотных возмущений, фактически не проводится. Поэтому необходимо ориентироваться на регуляризованные разностные схемы с более сильными регуляризаторами.

В программе PROBLEM13 реализована регуляризованная разностная схема (7.241), (7.248) с  $G = \Lambda^2$ :

$$(E + \alpha\Lambda^2) \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \Lambda y_n = 0. \quad (7.256)$$

Для рассматриваемой модельной задачи (7.180)–(7.182), (7.184) реализация (7.256) основана на использовании алгоритма пятиточечной прогонки.

Отметим некоторые возможности по выбору параметра регуляризации. Наиболее естественный подход связан с выбором параметра регуляризации по невязке, когда идет сравнение при  $t = 0$  решения прямой задачи типа (7.180)–(7.183), в которой граничное условие (7.183) формулируется по решению обратной задачи. Необходимо отметить два обстоятельства, которые делают не очень естественным такой подход при использовании регуляризованных разностных схем типа (7.256). Во-первых, используемый алгоритм в этом случае становится алгоритмом глобальной регуляризации (мы вынуждены решать задачу сразу при всех  $t$ ). Во-вторых, в рассматриваемой задаче вычислительная реализация прямой задачи (краевой задачи для эллиптического уравнения) значительно сложнее, чем для обратной (задача для эволюционного уравнения второго порядка).

В силу этого необходимо использовать алгоритмы выбора параметра регуляризации, которые сохраняли бы свойство локальной регуляризации

(последовательного определения приближенного решения на новом временном слое). Простейший вариант реализован в программе PROBLEM13.

Раньше (см. (7.140)–(7.143)) мы отмечали связь регуляризованных схем с алгоритмами сеточного сглаживания. Перепишем схему (7.256) в виде

$$\tilde{w}_n - \Lambda y_n = 0, \quad (E + \alpha \Lambda^2) w_n = \tilde{w}_n,$$

где

$$w_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2}.$$

Тем самым сначала определяется вторая разностная производная по явной формуле, а затем проводится ее сглаживание:

$$J_\alpha(w_n) = \min_{v \in H} J_\alpha(v),$$

$$J_\alpha(v) = \|v - \tilde{w}_n\|^2 + \alpha \|\Lambda v\|^2.$$

Регуляризация в нашем случае связывается со сглаживанием сеточных функций.

Указанную процедуру сглаживания необходимо провести прежде всего для входных данных, заданных с погрешностью. В нашем случае это сеточная функция  $y_0$ . Параметр регуляризации (сглаживания) в соответствии с принципом невязки естественно определить из условия

$$\|y_0 - u_0^\delta\| = \delta,$$

причем

$$J_\alpha(y_0) = \min_{v \in H} J_\alpha(v),$$

$$J_\alpha(v) = \|v - u_0^\delta\|^2 + \alpha \|\Lambda v\|^2.$$

### Программа PROBLEM13

```

C
C  PROBLEM13 - ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА
C              ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C              РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ СХЕМА
C
C  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C  PARAMETER ( DELTA = 0.005D0, N = 65, M = 65 )
C  DIMENSION UO(N), UOD(N), UT(N), U(N), U1(N), Y(N), Y1(N),
+           X(N), A(N), B(N), C(N), D(N), E(N), F(N)
C
C  ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C  XL, XR - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C  N      - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
```

```

C   TMAX  - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C   M     - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   Q     - МНОЖИТЕЛЬ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ;
C   UO(N) - НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ;
C   UOD(N) - ВОЗМУЩЕННОЕ НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ;
C   UT(N) - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ;
C   U(N)  - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   XL   = 0.DO
C   XR   = 1.DO
C   TMAX = 0.25D0
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H = (XR - XL) / (N - 1)
C   TAU = TMAX / (M-1)
C   DO I = 1, N
C       X(I) = XL + (I-1)*H
C   END DO
C
C   ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
C
C   DO I = 1, N
C       UO(I) = AU(X(I), 0.DO)
C       UT(I) = AU(X(I), TMAX)
C   END DO
C
C   ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
C   DO I = 2, N-1
C       UOD(I) = UO(I) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
C   END DO
C   UOD(1) = UO(1)
C   UOD(N) = UO(N)
C
C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C   СГЛАЖИВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ
C
C   IT = 0
C   ITMAX = 100
C   ALPHA = 0.00001D0
C   Q = 0.75D0
100 IT = IT + 1
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
C
C   DO I = 2, N-1
C       A(I) = ALPHA / (H**4)
C       B(I) = 4.DO * ALPHA / (H**4)

```

```

      C(I) = 6.DO * ALPHA / (H**4) + 1.DO
      D(I) = 4.DO * ALPHA / (H**4)
      E(I) = ALPHA / (H**4)
END DO
C(1)  = 1.DO
D(1)  = 0.DO
E(1)  = 0.DO
F(1)  = 0.DO
B(2)  = 0.DO
C(2)  = 5.DO * ALPHA / (H**4) + 1.DO
C(N-1) = 5.DO * ALPHA / (H**4) + 1.DO
D(N-1) = 0.DO
A(N)  = 0.DO
B(N)  = 0.DO
C(N)  = 1.DO
F(N)  = 0.DO
DO I = 2, N-1
      F(I) = UOD(I)
END DO

C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG5 ( N, A, B, C, D, E, F, U1, ITASK )

C
C      КРИТЕРИЙ ВЫХОДА ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА
C
      WRITE ( 01,* ) IT, ALPHA
      SUM = 0.DO
      DO I = 2, N-1
          SUM = SUM + (U1(I) - UOD(I))**2*H
      END DO
      SL2 = DSQRT(SUM)

C
      IF (IT.GT.ITMAX) STOP
      IF (IT.EQ.1) THEN
          IND = 0
          IF (SL2.LT.DELTA) THEN
              IND = 1
              Q = 1.DO/Q
          END IF
          ALPHA = ALPHA*Q
          GO TO 100
      ELSE
          ALPHA = ALPHA*Q
          IF (IND.EQ.0 .AND. SL2.GT.DELTA) GO TO 100
          IF (IND.EQ.1 .AND. SL2.LT.DELTA) GO TO 100
      END IF

C
C      РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ВЫБРАННОМ ПАРАМЕТРЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C      РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ СХЕМА
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ

```

C

```

DO I = 1, N
  Y1(I) = U1(I)
END DO
DO I = 2, N-1
  Y(I) = Y1(I)
+   + 0.5DO*TAU**2/H**2 * (Y1(I+1)-2.DO*Y1(I) + Y1(I-1))
END DO
Y(1) = 0.DO
Y(N) = 0.DO
DO K = 3, M

```

C

C

C

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ

```

DO I = 2, N-1
  A(I) = ALPHA / (H**4)
  B(I) = 4.DO * ALPHA / (H**4)
  C(I) = 6.DO * ALPHA / (H**4) + 1.DO
  D(I) = 4.DO * ALPHA / (H**4)
  E(I) = ALPHA / (H**4)
END DO
C(1) = 1.DO
D(1) = 0.DO
E(1) = 0.DO
F(1) = 0.DO
B(2) = 0.DO
C(2) = 5.DO * ALPHA / (H**4) + 1.DO
C(N-1) = 5.DO * ALPHA / (H**4) + 1.DO
D(N-1) = 0.DO
A(N) = 0.DO
B(N) = 0.DO
C(N) = 1.DO
F(N) = 0.DO
DO I = 3, N-2
  F(I) = A(I)*(2.DO*Y(I-2) - Y1(I-2))
+   - B(I)*(2.DO*Y(I-1) - Y1(I-1))
+   + C(I)*(2.DO*Y(I) - Y1(I))
+   - D(I)*(2.DO*Y(I+1) - Y1(I+1))
+   + E(I)*(2.DO*Y(I+2) - Y1(I+2))
+   - TAU**2/(H*H) * (Y(I+1)-2.DO*Y(I) + Y(I-1))
END DO
F(2) = - B(2)*(2.DO*Y(1) - Y1(1))
+   + C(2)*(2.DO*Y(2) - Y1(2))
+   - D(2)*(2.DO*Y(3) - Y1(3))
+   + E(2)*(2.DO*Y(4) - Y1(4))
+   - TAU**2/(H*H) * (Y(3)-2.DO*Y(2) + Y(1))
F(N-1) = A(N-1)*(2.DO*Y(N-3) - Y1(N-3))
+   - B(N-1)*(2.DO*Y(N-2) - Y1(N-2))
+   + C(N-1)*(2.DO*Y(N-1) - Y1(N-1))
+   - D(N-1)*(2.DO*Y(N) - Y1(N))
+   - TAU**2/(H*H) * (Y(N)-2.DO*Y(N-1) + Y(N-2))

```

C

C

РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ



```

C
      DO I = 1, N
        Y1(I) = Y(I)
      END DO
      ITASK = 1
      CALL PROG5 ( N, A, B, C, D, E, F, Y, ITASK )
END DO
DO I = 1, N
  U(I) = Y(I)
END DO

C
C  РЕШЕНИЕ
C
WRITE ( 01, * ) (UO(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (UT(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (UOD(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (X(I),I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (U(I),I=1,N)
CLOSE ( 01 )
STOP
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AU ( X, T )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C  ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ
C
PI = 3.1415926D0
C1 = 0.1D0
C2 = 0.5D0 * C1
AU = C1 * (DEXP(PI*T) + DEXP(-PI*T)) * DSIN(PI*X)
+ + C2 * (DEXP(2*PI*T) + DEXP(-2*PI*T)) * DSIN(2*PI*X)

C
RETURN
END

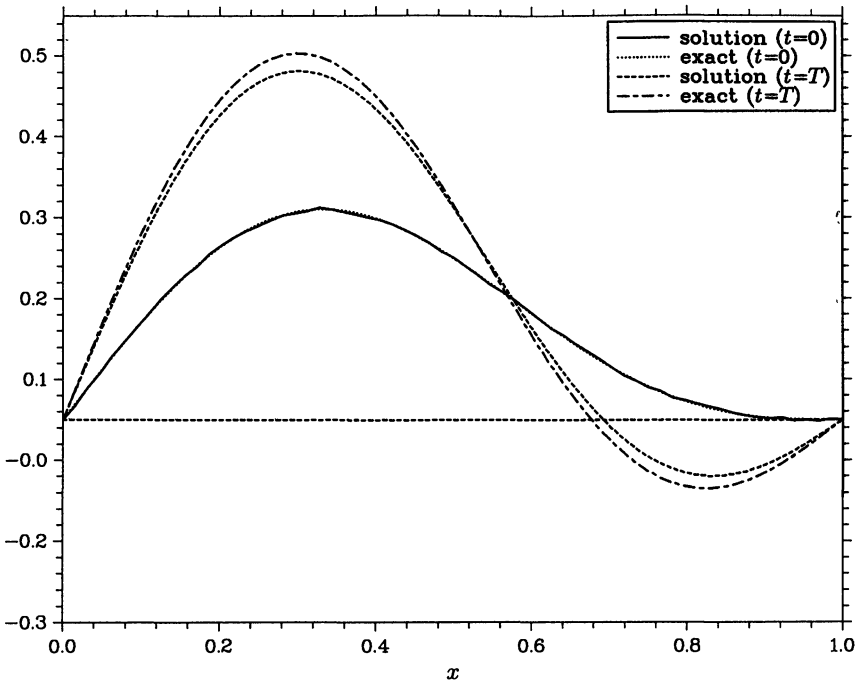
```

### 7.4.7. Примеры расчетов

Представленные ниже результаты получены при использовании равномерной сетки с  $h = 1/64$ ,  $l = 1$ . Обратная задача решается до момента времени  $T = 0,25$  с шагом сетки по времени  $\tau = T/64$ . Точное решение обратной задачи есть

$$u(x, t) = \operatorname{ch}(\pi t) \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2\pi t) \sin(2\pi x).$$

На рис. 7.14 представлено решение обратной задачи при уровне погрешностей, определяемом величиной  $\delta = 0,002$ , показаны точное и возмущенное начальные условия, точное и приближенное решения обратной задачи на конечный момент времени. Решение задачи при изменении уровня погрешностей показано на рис. 7.15, 7.16 (с. 358, 359). Результаты

Рис. 7.14. Решение задачи при  $\delta = 0,002$ 

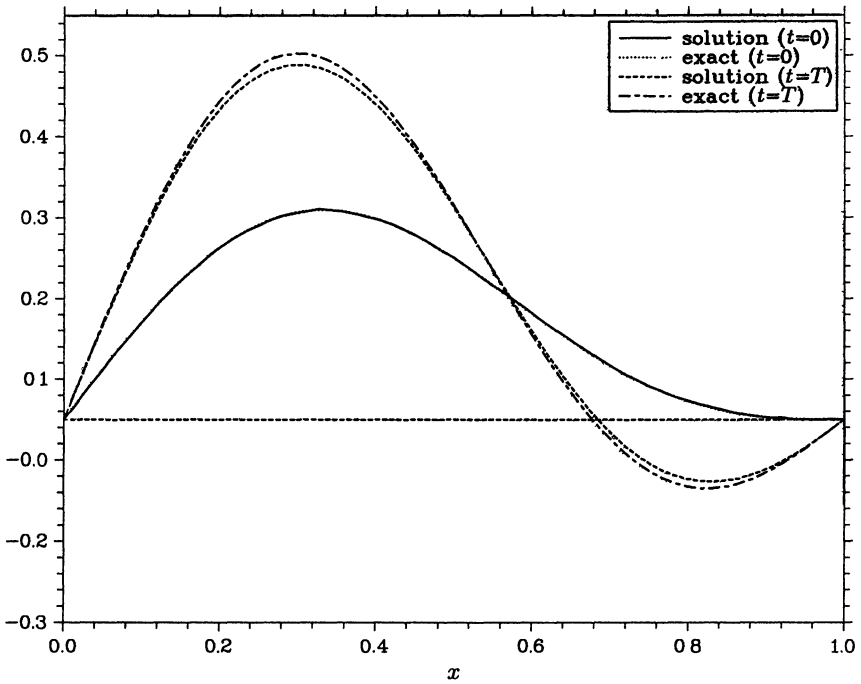
расчетов демонстрируют возможность восстановления гладкого решения при ошибках порядка одного процента.

## 7.5. Продолжение нестационарных полей по данным точечных наблюдений

Рассматривается обратная задача для модельного нестационарного параболического уравнения при неизвестных начальных условиях и заданной информации о решении в отдельных точках двумерной расчетной области. Дается описание вычислительного алгоритма, который базируется на использовании вариационной формулировки задачи и применении метода регуляризации А. Н. Тихонова.

### 7.5.1. Постановка задачи

Рассматривается задача определения нестационарного поля  $u(x, t)$ , которое удовлетворяет параболическому уравнению второго порядка

Рис. 7.15. Решение задачи при  $\delta = 0,001$ 

в ограниченной двумерной области  $\Omega$ , некоторым граничным условиям при условии, что имеется информация о решении в некоторых точках области. При этом начальное состояние  $u(x, 0)$  считается неизвестным. Такая задача является некорректной, в частности, мы никак не можем рассчитывать на единственность решения. Такая обратная задача типична, например, для гидрогеологии, когда фактически вся доступная информация о решении — измерения в наблюдательных скважинах.

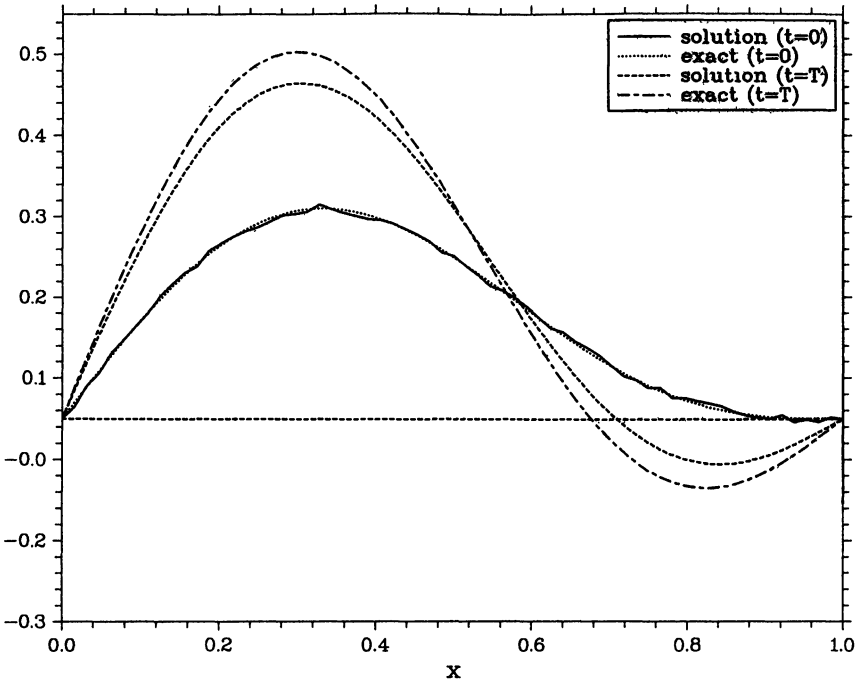
В ограниченной двумерной области  $\Omega$  ( $x = (x_1, x_2)$ ) мы ищем решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T. \quad (7.257)$$

Оно дополняется однородными граничными условиями первого рода:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T. \quad (7.258)$$

Чтобы сформулировать корректную задачу необходимо задать начальное состояние (функцию  $u(x, 0)$ ).

Рис. 7.16. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$ 

В рассматриваемой обратной задаче начальное состояние неизвестно. Дополнительная информация обусловлена наблюдениями за решением в отдельных точках расчетной области — в задании функции  $u(x, t)$  в точках  $z_m \in \Omega$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  (рис. 7.17). Принимая в учет погрешности в измерениях, положим

$$\begin{aligned} u(z_m, t) &\approx \varphi_m(t), \\ 0 < t < T, \\ m &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (7.259)$$

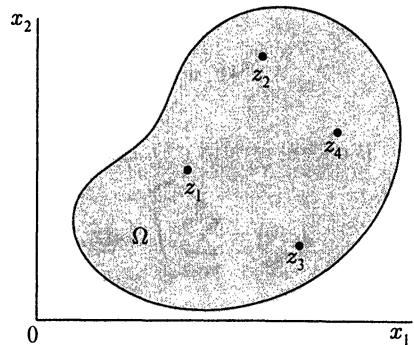


Рис. 7.17. К постановке задачи

Необходимо найти  $u(x, t)$  из уравнения (7.257), граничных условий (7.258) и дополнительных измерений (7.259).

При заданных измерениях в отдельных точках (см. (7.259)) можно ставить задачу обработки этих данных. На каждый момент времени можно пытаться интерполировать (экстраполировать) эти данные на все точки расчетной области. С этой точки зрения поставленная выше обратная задача (7.257)–(7.259) может рассматриваться как задача такой обработки при максимальном учете априорной информации о решении — задача интерполяции решается в классе функций, удовлетворяющих уравнению (7.257) и граничным условиям (7.258).

### 7.5.2. Вариационная задача

При рассмотрении обратной задачи (7.257)–(7.259) мы ограничимся рассмотрением проблем приближенного решения таких задач. Будем ее решать на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова. С этой целью будем использовать формулировку обратной задачи как задачи оптимального управления.

В качестве управления  $v(x)$  естественно выбрать начальное состояние. Соответствующее решение обозначим  $u(x, t; v)$ . Состояние системы  $u(x, t; v)$  определяется уравнением (7.257), граничными условиями (7.258) и начальным условием

$$u(x, 0; v) = v(x), \quad x \in \Omega. \quad (7.260)$$

Будем считать, что управление  $v(x)$  принадлежит гильбертову пространству

$$\mathcal{H} = \{v(x) \mid v(x) \in \mathcal{L}_2(\Omega), v(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

в котором скалярное произведение и норма определены следующим образом:

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x) dx, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

В соответствии с (7.259) выберем сглаживающий функционал в виде

$$J_{\alpha}(v) = \sum_{m=1}^M \int_0^T (u(z_m, t; v) - \varphi_m(t))^2 dt + \alpha \|v\|^2, \quad (7.261)$$

где  $\alpha > 0$  — параметр регуляризации. Выбор параметра регуляризации проводится с учетом погрешности в измерениях (7.259).

Оптимальное управление  $w(x)$  выбирается из минимума функционала (7.261), т. е.

$$J_{\alpha}(w) = \min_{v \in \mathcal{H}} J_{\alpha}(v). \quad (7.262)$$

Решение обратной задачи есть  $u(x, t) = u(x, t; w)$ .

Для вариационной задачи (7.257), (7.258), (7.260)–(7.262) будем использовать несколько более общую дифференциально-операторную формулировку, рассматривая ее в  $\mathcal{H}$ , так что  $u(\mathbf{x}, t; v) = u(t; v) \in \mathcal{H}$ . Уравнение (7.257) с граничными условиями (7.258) запишем в  $\mathcal{H}$  в виде эволюционного уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0, \quad 0 < t < T. \quad (7.263)$$

Оператор  $\mathcal{A}$ , определяемый согласно

$$\mathcal{A}u \equiv - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right),$$

самосопряжен и положительно определен в  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq \kappa \lambda_0 E, \quad (7.264)$$

где  $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  — минимальное собственное значение оператора Лапласа.

Введем функцию  $\chi$  следующим образом

$$\chi = \sum_{m=1}^M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_m),$$

где  $\delta(\mathbf{x})$  —  $\delta$ -функция, и пусть  $\varphi(t) \in \mathcal{H}$  такая, что

$$\chi \varphi(t) = \sum_{m=1}^M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_m) \varphi_m(t).$$

С учетом введенных обозначений функционал (7.261) может быть переписан в виде

$$J_{\alpha}(v) = \int_0^T (\chi, (u(t; v) - \varphi(t))^2) dt + \alpha \|v\|^2. \quad (7.265)$$

Уравнение (7.263) дополняется начальным условием (см. (7.260))

$$u(0) = v. \quad (7.266)$$

Тем самым мы приходим к задаче минимизации (7.262), (7.265) на решениях задачи (7.263), (7.266).

### 7.5.3. Сеточная задача

Для простоты ограничимся случаем, когда  $\Omega$  — прямоугольник:

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\beta < l_\beta, \beta = 1, 2\}.$$

В области  $\Omega$  введем равномерную по каждому направлению сетку с шагами  $h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Пусть, как обычно,  $\omega$  — множество внутренних узлов.

На множестве сеточных функций  $y(x)$  таких, что  $y(x) = 0$ ,  $x \notin \omega$ , определим сеточный оператор  $\Lambda$  соотношением

$$\Lambda y = - \sum_{\beta=1}^2 (a_\beta y_{\bar{x}_\beta})_{x_\beta}, \quad (7.267)$$

где, например,

$$a_1(x) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2),$$

$$a_2(x) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2).$$

В сеточном гильбертовом пространстве  $H = L_2(\omega)$  скалярное произведение и норму введем соотношениями

$$(y, w) = \sum_{x \in \omega} y(x)w(x)h_1h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

В  $H$  имеем  $\Lambda = \Lambda^* \geq \gamma E$ ,  $m > 0$ , где

$$\gamma = \kappa \left( \frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right).$$

От (7.263), (7.266) перейдем к дифференциально-операторному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda y = 0, \quad 0 < t < T \quad (7.268)$$

при заданном начальном условии:

$$y(0) = v, \quad x \in \omega. \quad (7.269)$$

Обозначим через  $y_n$  разностное решение на момент времени  $t_n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N_0$ ,  $N_0\tau = T$ , где  $\tau > 0$  — шаг по времени. Для задачи (7.268), (7.269) будем использовать двухслойную схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.270)$$

дополненную начальным условием

$$y_0(x) = v(x), \quad x \in \omega. \quad (7.271)$$

Запишем схему (7.270) в канонической форме

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (7.272)$$

Для сеточных операторов  $B$  и  $A$  имеем

$$B = E + \sigma\tau A, \quad A = \Lambda. \quad (7.273)$$

Схема с весами (7.272), (7.273) с  $A = A^* > 0$  устойчива (см. теорему 4.13) в  $H$  при (необходимое и достаточное условие)

$$E + \tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) A \geq 0.$$

Это условие выполнено при всех  $\sigma \geq 0,5$ , т. е. в этом случае мы имеем безусловно устойчивую разностную схему. При  $\sigma < 0,5$  схема (7.272), (7.273) условно устойчива. Для разностного решения задачи (7.270), (7.271) при  $\sigma \geq 0,5$  верна априорная оценка

$$\|y_n\| \leq \|v\|, \quad n = 1, 2, \dots, N_0,$$

выражающая устойчивость по начальным данным.

Будем считать, что точки наблюдения  $z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  совпадают с некоторыми внутренними узлами расчетной сетки. Подобно непрерывному случаю определим сеточную функцию  $\chi_h \in H$  следующим образом

$$\chi_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{m=1}^M \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - z_m) dx,$$

т. е.  $\chi_h \in H$  представляет собой сумму соответствующих сеточных  $\delta$ -функций. Аналогично мы можем ввести  $\varphi_h(\mathbf{x}, t_n)$ ,  $\mathbf{x} \in \omega$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0$  так что

$$\chi_h(\mathbf{x}) \varphi_h(\mathbf{x}, t_n) = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{m=1}^M \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - z_m) \varphi_m(t_n) dx.$$

Функционалу (7.265) поставим в соответствие следующий сеточный функционал

$$J_\alpha(v) = \sum_{n=1}^{N_0} (\chi_h, (y(\mathbf{x}, t_n; v) - \varphi_h(\mathbf{x}, t_n))^2) \tau + \alpha \|v\|^2. \quad (7.274)$$

Задача минимизации

$$J_\alpha(w) = \min_{v \in H} J_\alpha(v) \quad (7.275)$$

решается при ограничениях (7.270), (7.271).



### 7.5.4. Численное решение сеточной задачи

Для приближенного решения рассматриваемой дискретной вариационной задачи будем применять градиентные итерационные методы. Сначала получим уравнение Эйлера (условия оптимальности) для исследуемой вариационной задачи, для приближенного решения которого применяются итерационные методы.

Чтобы сформулировать условия оптимальности для задачи (7.271), (7.272), (7.274), (7.275) рассмотрим задачу для приращений. Из (7.271), (7.272) имеем

$$B \frac{\delta y_{n+1} - \delta y_n}{\tau} + A \delta y_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (7.276)$$

$$\delta y_0 = \delta v. \quad (7.277)$$

Для того чтобы сформулировать задачу для сопряженного состояния  $\psi_n$ , домножим уравнение (7.276) (скалярно в  $H$ ) на  $\tau \psi_{n+1}$  и просуммируем по  $n$  от 0 до  $N_0 - 1$ . Это дает

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} ((B \delta y_{n+1}, \psi_{n+1}) + ((\tau A - B) \delta y_n, \psi_{n+1})) = 0. \quad (7.278)$$

Принимая во внимание постоянство и самосопряженность операторов  $A$  и  $B$ , имеем для первого слагаемого

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} (B \delta y_{n+1}, \psi_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N_0} (\delta y_n, B \psi_n).$$

Сеточную функцию  $\psi_n$  будем рассматривать при  $n = 0, 1, \dots, N_0$  и следующих дополнительных условиях:

$$\psi_{N_0+1} = 0. \quad (7.279)$$

Второе слагаемое в (7.278) преобразуется подобным образом:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N_0-1} ((\tau A - B) \delta y_n, \psi_{n+1}) &= \sum_{n=0}^{N_0} ((\tau A - B) \delta y_n, \psi_{n+1}) = \\ &= \sum_{n=1}^{N_0} (\delta y_n, (\tau A - B) \psi_{n+1}) + (\delta y_0, (\tau A - B) \psi_1). \end{aligned} \quad (7.280)$$

Подстановка (7.279), (7.280) в (7.278) дает равенство

$$\sum_{n=0}^{N_0} (\delta y_n, (B \psi_n + (\tau A - B) \psi_{n+1})) = (\delta v, B \psi_0). \quad (7.281)$$

Принимая во внимание вид функционала (7.274), будем определять сопряженное состояние из разностного уравнения

$$B \frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{\tau} + A\psi_{n+1} = \chi_h(y_n - \varphi_h(x, t_n)), \quad (7.282)$$

$$n = N_0, N_0 - 1, \dots, 0,$$

дополнив его условиями (7.279). Схема (7.279), (7.282) устойчива при тех же условиях, что и схема (7.271), (7.272) для основного состояния.

Из (7.281) мы можем получить для градиента функционала (7.274) представление

$$J'_\alpha(v) = 2 \left( \frac{1}{\tau} B\psi_0 + \alpha v \right). \quad (7.283)$$

Необходимое и достаточное условие минимума функционала (7.274) в соответствии с (7.283) записывается в виде

$$B\psi_0 + \tau\alpha v = 0. \quad (7.284)$$

Строится итерационный метод для того, чтобы решить уравнение (7.284).

Итерационный алгоритм коррекции начального условия состоит в следующей организации вычислительного процесса.

- При заданном  $w^k$  ( $k$  — номер итерации) решается задача для определения основного состояния:

$$B \frac{y_{n+1}^k - y_n^k}{\tau} + Ay_n^k = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$y_0^k(x) = w^k(x), \quad x \in \omega.$$

- Затем мы рассчитываем сопряженное состояние:

$$B \frac{\psi_n^k - \psi_{n+1}^k}{\tau} + A\psi_{n+1}^k = 2\chi_h(y_n^k - \varphi_h(x, t_n)), \quad n = N_0, N_0 - 1, \dots, 1,$$

$$B \frac{\psi_0^k - \psi_1^k}{\tau} + A\psi_1^k = 0, \quad \psi_{N_0+1}^k = 0, \quad x \in \omega.$$

- Проводится уточнение начального условия:

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{s^{k+1}} + B\psi_0^k + \alpha w^k = 0, \quad x \in \omega.$$

Тем самым алгоритм основан на решении двух нестационарных разностных задач и уточнении начального условия на каждой итерации.

Вторая более привлекательная возможность связана с построением итерационного метода минимизации функционала невязки (в (7.274)

параметр  $\alpha = 0$ ). Это соответствует применению итерационного метода для решения уравнения (см. (7.284))

$$B\psi_0 = 0. \quad (7.285)$$

В случае (7.285) используется та же организация вычислений, что и при решении (7.284). Однако (это основное преимущество итерационных методов перед методом регуляризации А. Н. Тихонова) нет проблем в специальном определении параметра регуляризации.

### 7.5.5. Программа

В приведенной ниже распечатке программы реализован итерационный метод минимизации функционала невязки (решается уравнение (7.285)). Для того чтобы не усложнять программу, мы ограничились итерационным методом простой итерации, когда

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{s} + B\psi_0^k = 0, \quad x \in \omega,$$

и значение итерационного параметра  $s$  задается явно.

#### Программа PROBLEM14

```

C
C   PROBLEM14 - ПРОДОЛЖЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ
C               ПО ТОЧЕЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ
C               ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               ИТЕРАЦИОННОЕ УТОЧНЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.02D0, N1 = 51, N2 = 51, M = 101, L = 10 )
C   DIMENSION A(13*N1*N2), X1(N1), X2(N2),
C   +         XP(L), YP(L), IM(L), JM(L),
C   +         FF(L), FI(L,M), FID(L,M), FIK(L,M)
C   COMMON / SB5 / IDEFAULT(4)
C   COMMON / CONTROL / IREPТ, NITER
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   X1L, X2L - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО УГЛА;
C   X1R, X2R - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО УГЛА;
C   N1, N2   - ЧИСЛО УЗЛОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКИ;
C   N1, N2   - ШАГИ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TAU      - ШАГ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   UO(N1,N2) - ВОССТАНАВЛИВАЕМОЕ НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ;
C   XP(L),   - КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НАБЛЮДЕНИЯ;
C   YP(L)
C   FI(L,M)  - РЕШЕНИЕ В ТОЧКАХ НАБЛЮДЕНИЯ;
C   FID(L,M) - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ТОЧКАХ НАБЛЮДЕНИЯ;

```

```

C
C   EPSR      - ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C   EPSA      - АБСОЛЮТНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   EQUIVALENCE (A(1),          AO          ),
C   *           (A(N+1),        A1          ),
C   *           (A(2*N+1),      A2          ),
C   *           (A(9*N+1),      F           ),
C   *           (A(10*N+1),     UO          ),
C   *           (A(11*N+1),     V           ),
C   *           (A(12*N+1),     B           ),
C
C   X1L = 0.DO
C   X1R = 1.DO
C   X2L = 0.DO
C   X2R = 1.DO
C   TMAX = 0.025DO
C   PI   = 3.1415926DO
C   EPSR = 1.D-5
C   EPSA = 1.D-8
C   SS   = - 2.DO
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H1 = (X1R-X1L) / (N1-1)
C   H2 = (X2R-X2L) / (N2-1)
C   TAU = TMAX / (M-1)
C   DO I = 1, N1
C     X1(I) = X1L + (I-1)*H1
C   END DO
C   DO J = 1, N2
C     X2(J) = X2L + (J-1)*H2
C   END DO
C
C   N = N1*N2
C   DO I = 1, 13*N
C     A(I) = 0.0
C   END DO
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
C   T = 0.DO
C   CALL MEGP ( XP, YP, IM, JM, L, H1, H2 )
C   CALL INIT ( A(10*N+1), X1, X2, N1, N2 )
C   CALL PU ( IM, JM, A(10*N+1), N1, N2, FF, L )
C   DO IP = 1,L
C     FI(IP,1) = FF(IP)
C   END DO

```

```

DO K = 2, M
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
  CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+          N1, N2, N1, N2, TAU )
C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
  IDEFAULT(1) = 0
  IREPT       = 0
  CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
C
C   РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЯ
C
  CALL PU ( IM, JM, A(10*N+1), N1, N2, FF, L )
  DO IP = 1, L
    FI(IP,K) = FF(IP)
  END DO
END DO
C
C   ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
DO K = 1, M
  DO IP = 1, L
    FID(IP,K) = FI(IP,K) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
  END DO
END DO
C
C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД
C
  IT = 0
C
C   НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
DO I = 1, N
  A(11*N+I) = 0.DO
END DO
C
100 IT = IT + 1
C
C   ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ
C
  T = 0.DO
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
DO I = 1, N
  A(10*N+I) = A(11*N+I)
END DO
CALL PU ( IM, JM, A(10*N+1), N1, N2, FF, L )
DO IP = 1, L

```

```

      FIK(IP,1) = FF(IP)
      END DO
      DO K = 2, M
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+             H1, H2, N1, N2, TAU )
C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT       = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
C
C      РЕШЕНИЕ В ТОЧКАХ НАБЛЮДЕНИЯ
C
      CALL PU ( IM, JM, A(10*N+1), N1, N2, FF, L )
      DO IP = 1, L
          FIK(IP,K) = FF(IP)
      END DO
      END DO
C
C      СОПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
C
      T = TMAX + TAU
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      DO I = 1, N
          A(10*N+I) = 0.DO
      END DO
      DO K = 2, M+1
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(9*N+1), A(10*N+1),
+             H1, H2, N1, N2, TAU )
      CALL RHS ( A(9*N+1), N1, N2, H1, H2, FID, FIK, IM, JM, L, M, K )
C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT       = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
      END DO
C
C      МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ
C      НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
      CALL BS ( A(10*N+1), A(1), A(N+1), A(2*N+1), A(12*N+1), N1, N2 )
      DO I = 1, N
          A(11*N+I) = A(11*N+I) - SS*A(12*N+I)
      END DO

```

```

END DO
C
C   ВЫХОД ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПО НЕВЯЗКЕ
C
SUM = 0.DO
DO K = 1, M
  DO IP = 1, L
    SUM = SUM + (FID(IP,K) - FIK(IP,K))**2*TAU
  END DO
END DO
SUM = SUM/(L*TMAX)
SL2 = DSQRT(SUM)
WRITE ( *,* ) IT, SL2
IF (SL2.GT.DELTA) GO TO 100
C
C   РЕШЕНИЕ
C
WRITE ( 01, * ) (A(11*N+I), I=1,N)
WRITE ( 01, * ) ((FI(IP,K), IP=1,L), K=1,M)
CLOSE ( 01 )
STOP
END
C
SUBROUTINE INIT ( U, X1, X2, N1, N2 )
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION U(N1,N2), X1(N1), X2(N2)
DO I = 1, N1
  DO J = 1, N2
    U(I,J) = 0.DO
    IF ((X1(I)-0.6DO)**2 + (X2(J)-0.6DO)**2.LE.0.04DO)
+      U(I,J) = 1.DO
  END DO
END DO
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE FDS ( A0, A1, A2, F, U, H1, H2, N1, N2, TAU )
C
C   ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
C   ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧИСТО НЕЯВНОЙ СХЕМЫ
C
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION A0(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2), F(N1,N2), U(N1,N2)
C
DO J = 2, N2-1
  DO I = 2, N1-1
    A1(I-1,J) = 1.DO/(H1*H1)
    A1(I,J) = 1.DO/(H1*H1)

```

```

      A2(I,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
      A2(I,J)   = 1.DO/(H2*H2)
      AO(I,J)   = A1(I,J) + A1(I-1,J) + A2(I,J) + A2(I,J-1)
+
      F(I,J)    = U(I,J)/TAU
      END DO
END DO
C
C   ОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
C
DO J = 2, N2-1
  AO(1,J) = 1.DO
  A1(1,J) = 0.DO
  A2(1,J) = 0.DO
  F(1,J)  = 0.DO
END DO
C
DO J = 2, N2-1
  AO(N1,J) = 1.DO
  A1(N1-1,J) = 0.DO
  A1(N1,J) = 0.DO
  A2(N1,J) = 0.DO
  F(N1,J)  = 0.DO
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  AO(I,1) = 1.DO
  A1(I,1) = 0.DO
  A2(I,1) = 0.DO
  F(I,1)  = 0.DO
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  AO(I,N2) = 1.DO
  A1(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2-1) = 0.DO
  F(I,N2)  = 0.DO
END DO
C
  AO(1,1) = 1.DO
  A1(1,1) = 0.DO
  A2(1,1) = 0.DO
  F(1,1)  = 0.DO
C
  AO(N1,1) = 1.DO
  A2(N1,1) = 0.DO
  F(N1,1)  = 0.DO
C
  AO(1,N2) = 1.DO
  A1(1,N2) = 0.DO
  F(1,N2)  = 0.DO
C

```



```

      AO(N1,N2) = 1.DO
      F(N1,N2) = 0.DO
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE RHS ( F, N1, N2, H1, H2, FI, FIK, IM, JM, L, M, K )
C
C      ПРАВАЯ ЧАСТЬ В УРАВНЕНИИ ДЛЯ СОПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION F(N1,N2), FI(L,M), FIK(L,M), IM(L), JM(L)
C
      DO J = 2, N2-1
        DO I = 2, N1-1
          DO IP = 1, L
            IF (I.EQ.IM(IP).AND.J.EQ.JM(IP)) THEN
              F(I,J) = F(I,J) + (FIK(IP,M+2-K)-FI(IP,M+2-K))/(H1*H2)
            END IF
          END DO
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE MEGP ( XP, YP, IM, JM, L, H1, H2 )
C
C      ТОЧКИ НАБЛЮДЕНИЯ
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION IM(L), JM(L), XP(L), YP(L)
C
      XP(1) = 0.17D0
      YP(1) = 0.53D0
      XP(2) = 0.36D0
      YP(2) = 0.87D0
      XP(3) = 0.42D0
      YP(3) = 0.39D0
      XP(4) = 0.58D0
      YP(4) = 0.48D0
      XP(5) = 0.83D0
      YP(5) = 0.25D0
      XP(6) = 0.11D0
      YP(6) = 0.15D0
      XP(7) = 0.76D0
      YP(7) = 0.71D0
      XP(8) = 0.28D0
      YP(8) = 0.33D0
      XP(9) = 0.35D0
      YP(9) = 0.65D0
      XP(10) = 0.49D0
      YP(10) = 0.24D0

```

```

DO IP = 1, L
  IM(IP) = XP(IP)/H1 + 1
  IF ((XP(IP) - IM(IP)*H1).GT. 0.5D0*H1) IM(IP) = IM(IP)+1
  JM(IP) = YP(IP)/H2 + 1
  IF ((YP(IP) - JM(IP)*H2).GT. 0.5D0*H2) JM(IP) = JM(IP)+1
END DO
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE PU ( IM, JM, U, N1, N2, F, L )
C
C РЕШЕНИЕ В ТОЧКАХ ИЗМЕРЕНИЯ
C
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION IM(L), JM(L), F(L), U(N1,N2)
C
DO IP = 1,L
  I = IM(IP)
  J = JM(IP)
  F(IP) = U(I,J)
END DO
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE BS ( U, A0, A1, A2, B, N1, N2 )
C
C ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА
C
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION U(N1,N2), A0(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2), B(N1,N2)
C
DO J = 2, N2-1
  DO I = 2, N1-1
    B(I,J) = A0(I,J)*U(I,J)
*      - A1(I-1,J)*U(I-1,J)
*      - A1(I,J)*U(I+1,J)
*      - A2(I,J-1)*U(I,J-1)
*      - A2(I,J)*U(I,J+1)
  END DO
END DO
C
RETURN
END

```

Мы ограничились случаем, когда в уравнении (7.257)  $k(x) = 1$  и использованием чисто неявной схемы (коэффициенты разностной схемы для основного состояния формируются в подпрограмме FDS, для сопряженного — в FDS и RHS).

### 7.5.6. Примеры расчетов

В качестве основной использовалась равномерная сетка с  $h_1 = 0,02$ ,  $h_2 = 0,02$  для задачи в единичном квадрате. При реализации квазиреального эксперимента в качестве входных данных берется решение прямой задачи в некоторых точках расчетной области. Задача решается до момента времени  $T = 0,025$ , шаг сетки по времени  $\tau = 0,00025$ . Для прямой задачи начальное условие задается в виде

$$u_0(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} 1, & (x_1 - 0,6)^2 + (x_2 - 0,6)^2 \leq 0,04, \\ 0, & (x_1 - 0,6)^2 + (x_2 - 0,6)^2 > 0,04. \end{cases}$$

На рис. 7.18 показано расположение точек наблюдения и отмечена часть расчетной области, в которой начальное условие локализовано. В качестве входных данных берутся решения в точках наблюдения (см. рис. 7.19).

Представим некоторые результаты расчетов, которые демонстрируют возможности восстановления начального условия по данным точечных наблюдений. На рис. 7.20 представлено решение обратной задачи при уровне погрешностей, определяемом величиной  $\delta = 0,02$  (представлены линии уровня с шагом  $\Delta u = 0,1$ ). Влияние уровня погрешностей иллюстрируется на рис. 7.21, 7.22 (с. 376).

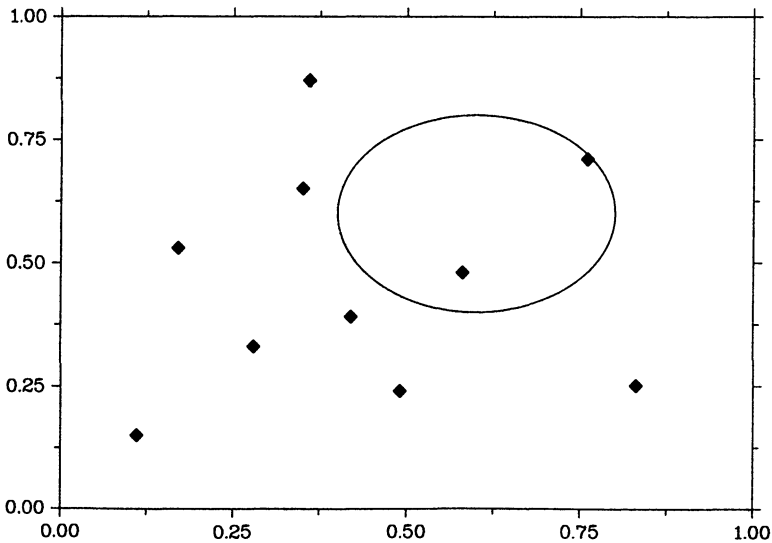


Рис. 7.18. Точки наблюдения и начальное условие в прямой задаче

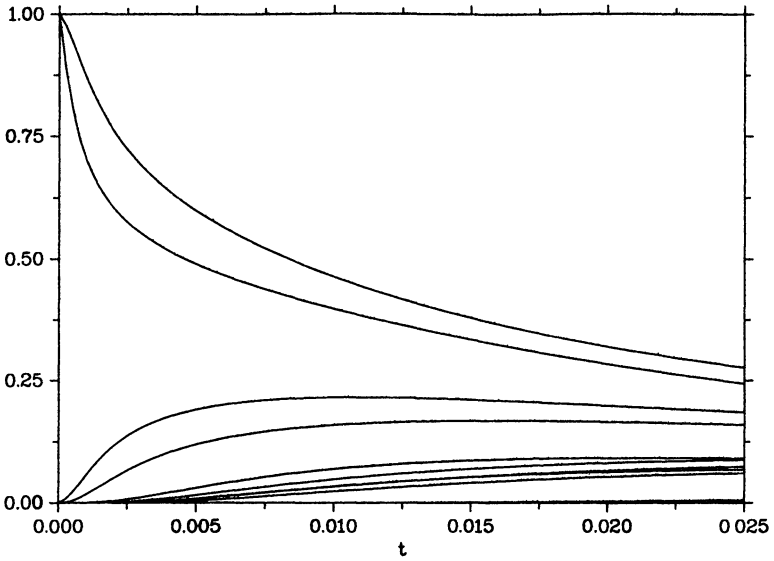


Рис. 7.19. Решение в точках наблюдения

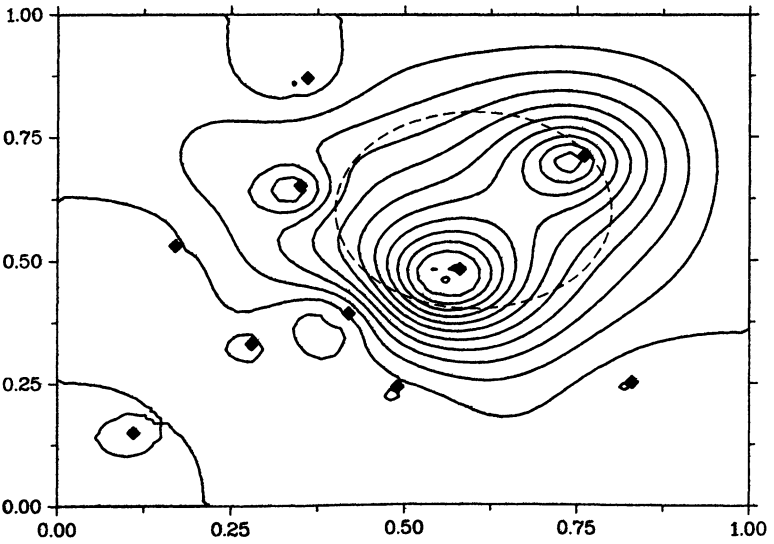


Рис. 7.20. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,02$

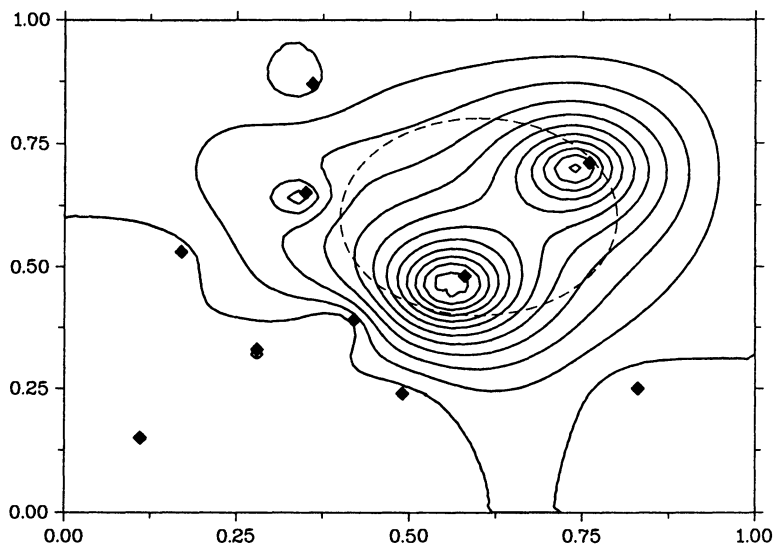


Рис. 7.21. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,04$

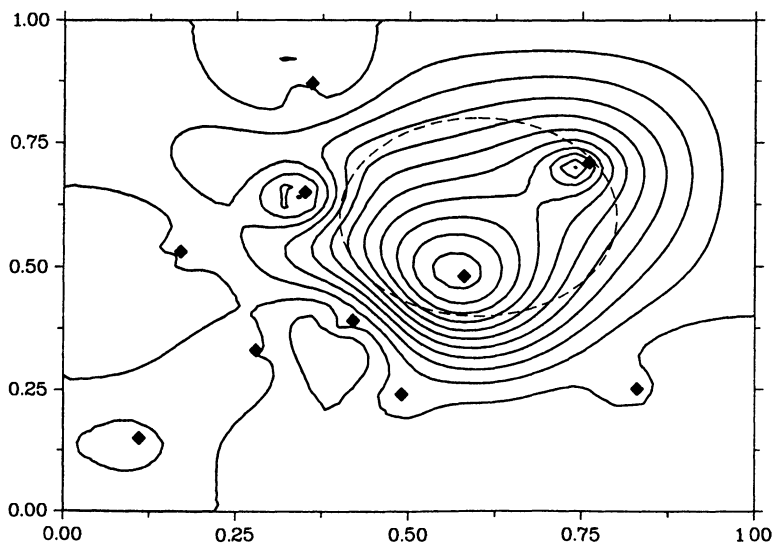


Рис. 7.22. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

## 7.6. Задачи и упражнения

**7.1.** Исследуйте сходимость приближенного решения, определяемого из (7.14), (7.36), к точному решению задачи (7.6), (7.7) в  $\mathcal{H}_D$ ,  $D = S^2$ .

**7.2.** Сформулируйте нелокальную задачу, которая соответствует задаче оптимального управления (7.38)–(7.41) в случае несамосопряженного оператора  $A$ .

**7.3.** С использованием программы PROBLEM10 исследуйте зависимость точности приближенного решения от времени и сопоставьте полученные экспериментальные данные с результатами теоретического анализа (см. оценку (7.35)).

**7.4.** Проведите исследование варианта метода квазиобращения (7.109), (7.138) при приближенном решении некорректной задачи (7.101), (7.102).

**7.5.** Рассмотрите аддитивную схему покомпонентного расщепления (схему суммарной аппроксимации)

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{\tau} - \Lambda_1 y_n + \alpha \Lambda_1^2 (\sigma y_{n+1/2} + (1 - \sigma) y_n) = 0,$$

$$\frac{y_{n+1} - y_{n+1/2}}{\tau} - \Lambda_2 y_{n+1/2} + \alpha \Lambda_2^2 (\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma) y_{n+1/2}) = 0$$

для решения задачи Коши для уравнения (7.158).

**7.6.** На основе расчетов по программе PROBLEM11 исследуйте влияние на точность восстановления начального условия гладкости точного решения задачи.

**7.7.** Рассмотрите возможность использования итерационных методов решения задачи с обратным временем (7.159)–(7.161), построенных на основе минимизации функционала невязки.

**7.8.** Постройте итерационный метод уточнения начального условия в схеме (7.166), (7.167) для приближенного решения ретроспективной обратной задачи при несамосопряженном положительно определенном операторе  $\Lambda$ .

**7.9.** При использовании программы PROBLEM12 проведите экспериментальное исследование влияния выбора оператора  $B$  в (7.179) на возможность выделения решения искомой гладкости.

**7.10.** Постройте разностную схему для нелокальной краевой задачи

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l,$$

$$u(0) + \alpha u(l) = \mu_1,$$

$$-k(0) \frac{du}{dx}(0) = \mu_2.$$

Модифицируйте алгоритм прогонки для решения соответствующей нелокальной сеточной задачи.

**7.11.** Постройте и исследуйте на устойчивость разностные схемы для метода квазиобращения (7.220)–(7.222) для приближенного решения некорректной задачи (7.187)–(7.189).

**7.12.** Проведите вычислительные эксперименты (программа PROBLEM13) по изучению зависимости точности решения задачи Коши для уравнения Лапласа от гладкости точных начальных условий.

**7.13.** Сформулируйте условия оптимальности для задачи минимизации (7.274), (7.275) при ограничениях (7.270), (7.271).

**7.14.** Получите условия оптимальности для сеточной задачи (7.271)–(7.275), когда оператор  $\Lambda > 0$  не является самосопряженным.

**7.15.** Модифицируйте программу PROBLEM14 так, чтобы для уточнения начального условия использовался не метод простой итерации, а метод минимальных невязок.

## Глава 8

---

### Другие задачи

Выше рассмотрены два класса обратных задач для уравнений математической физики, связанных с идентификацией правых частей уравнений и начального условия. Среди других важных для приложений отметим граничные обратные задачи, когда восстанавливаются граничные условия. Для их приближенного решения применяются методы с возмущением как самого уравнения, так и методы с нелокальным возмущением граничных условий. При решении граничной обратной задачи методом квазиобращения при рассмотрении пространственной координаты как эволюционной можно выделить метод *гиперболической* регуляризации — переход от параболического уравнения к гиперболическому. Возможности метода квазиобращения при возмущении граничных условий обсуждаются на примере граничной обратной задачи для одномерного параболического уравнения второго порядка. Для более общей двумерной задачи применяется алгоритм итерационного уточнения граничного условия. Наиболее трудными для исследования являются коэффициентные обратные задачи для уравнений математической физики. Мы ограничились рассмотрением вопросов численного решения двух коэффициентных задач. Первая из них связана с определением зависимости старшего коэффициента от решения для одномерного параболического уравнения. Описан вычислительный алгоритм решения коэффициентной обратной задачи для двумерного эллиптического уравнения в случае, когда неизвестный коэффициент не зависит от одной координаты.

#### 8.1. Продолжение по пространственной переменной в граничной обратной задаче

Рассматривается граничная обратная задача для одномерного параболического уравнения второго порядка (уравнения теплопроводности),



которая состоит в восстановлении граничного режима по данным измерений внутри расчетной области. Такая задача принадлежит к классу условно корректных и для ее устойчивого решения привлекаются методы регуляризации. Здесь применяется метод квазиобращения в условиях, когда задача рассматривается как эволюционная по пространственной переменной. Использование метода квазиобращения ведет, в частности, к известной *гиперболической* регуляризации граничной обратной задачи.

### 8.1.1. Постановка задачи

Среди обратных задач математической физики особенно важное прикладное значение имеет граничная обратная задача. Она связана с проблемами диагностики, когда по дополнительным измерениям внутри расчетной области необходимо восстановить граничный режим там, где прямые измерения невозможны.

Такая задача принадлежит к классу условно корректных и для ее приближенного решения разрабатываются специальные методы регуляризации. Одним из общих подходов к решению неустойчивых задач для уравнений с частными производными является метод квазиобращения. Он основан на некотором возмущении исходного уравнения, причем для возмущенного уравнения задача уже корректна. Здесь параметр возмущения выступает в качестве параметра регуляризации.

При рассмотрении граничной обратной задачи для одномерного параболического уравнения второго порядка метод квазиобращения может быть основан на рассмотрении исходной задачи как задачи для эволюционного уравнения первого порядка. Вторая возможность связана с рассмотрением исследуемой граничной обратной задачи как задачи с начальными данными для эволюционного уравнения второго порядка. В качестве эволюционной переменной выступает пространственная переменная. Поэтому мы и говорим в этом случае о продолжении по пространственной переменной в граничной обратной задаче.

Рассмотрим граничную обратную задачу для параболического уравнения при продолжении решения по пространственной переменной, которая выступает в качестве временной переменной. Задача ставится следующим образом. Решение  $v(x, t)$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (8.1)$$

дополненного начальными условиями по переменным  $x$  и  $t$  следующего вида:

$$v(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (8.3)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (8.4)$$

Сделаем в граничной обратной задаче (8.1)–(8.4) замену переменных:  $x$  заменяется на  $t$ ,  $t$  — на  $x$  ( $l \rightarrow T$ ,  $T \rightarrow l$ ), искомое решение обозначим  $u(x, t)$  ( $= v(t, x)$ ). Для нахождения  $u(x, t)$  получим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (8.5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (8.6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.8)$$

где в новых обозначениях функции  $\varphi(t)$  соответствует  $u_0(x)$ .

Задача (8.5)–(8.8) записывается в виде операторного уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \mathcal{A}u = 0 \quad (8.9)$$

с начальными условиями (8.7), (8.8). Оператор  $\mathcal{A}$  определяется выражением

$$\mathcal{A}u = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.10)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \mid u = u(x, t), \quad x \in [0, l], \quad u(0, t) = 0\}.$$

Введенный оператор  $\mathcal{A}$  не является самосопряженным и не знакоопределен в  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, l)$ .

### 8.1.2. Метод квазиобращения

Для приближенного решения обратной задачи (8.7)–(8.9) применим метод квазиобращения. Используем вариант метода квазиобращения, когда приближенное решение  $u_\alpha(x, t)$  определим из возмущенного уравнения

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}u_\alpha + \alpha \mathcal{A}^* \mathcal{A}u_\alpha = 0, \quad (8.11)$$

дополненного начальными условиями

$$u_\alpha(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (8.13)$$

Сопряженный в  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(0, l)$  к  $\mathcal{A}$  оператор на основании (8.10) определяется выражением

$$\mathcal{A}^*u = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (8.14)$$

причем

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \{u \mid u = u(x, t), x \in [0, l], u(l, t) = 0\}.$$

Вариант метода квазиобращения (8.11)–(8.13) с учетом (8.10), (8.14) соответствует решению следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (8.15)$$

$$u_\alpha(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (8.17)$$

$$u_\alpha(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (8.19)$$

Тем самым, метод квазиобращения приводит нас к известному в вычислительной практике гиперболическому возмущению (уравнение (8.15)) исходного параболического уравнения (8.5).

**Теорема 8.1.** Для решения краевой задачи (8.15)–(8.19) справедлива априорная оценка

$$\left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, t) \right\|^2 + \alpha \left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(x, t) \right\|^2 \leq \alpha \exp \{t/\sqrt{\alpha}\} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \right\|^2. \quad (8.20)$$

*Доказательство.* Доказательство этого утверждения проведем в более общих условиях (для задачи (8.11)–(8.13)). Домножим скалярно уравнение (8.11) на  $du/dt$  и получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \left\| \frac{du_\alpha}{dt} \right\|^2 + \alpha \|Au_\alpha\|^2 \right) = \left( Au_\alpha, \frac{du_\alpha}{dt} \right). \quad (8.21)$$

Для правой части имеем

$$\left( Au_\alpha, \frac{du_\alpha}{dt} \right) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left( \left\| \frac{du_\alpha}{dt} \right\|^2 + \alpha \|Au_\alpha\|^2 \right). \quad (8.22)$$

Подстановка (8.22) в (8.21) приводит к оценке

$$\left\| \frac{du_\alpha}{dt} \right\|^2 + \alpha \|Au_\alpha\|^2 \leq \alpha \exp \{t/\sqrt{\alpha}\} \|Au_0\|^2. \quad (8.23)$$

Из (8.23) непосредственно следует более простая оценка

$$\|Au_\alpha\| \leq \alpha \exp \{t/2\sqrt{\alpha}\} \|Au_0\|.$$

Доказываемая оценка (8.20) для возмущенной задачи (8.15)–(8.19) есть простое следствие оценки (8.23). ■

Можно использовать и некоторые другие варианты метода квази-обращения. Например, определим приближенное решение из уравнения

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - Au_\alpha + \alpha A A^* \frac{du_\alpha}{dt} = 0, \quad (8.24)$$

дополнив его условиями (8.12), (8.13).

Поэтому приближенное решение  $u_\alpha(x, t)$  в соответствии с (8.10), (8.14) определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (8.25)$$

и условий (8.16)–(8.19). Аналогично теореме 8.1 формулируется следующее утверждение.

**Теорема 8.2.** Для решения краевой задачи (8.16)–(8.19), (8.25) справедлива априорная оценка

$$\|u_\alpha(x, t)\|^2 + \left\| \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, t) \right\|^2 \leq \exp \left\{ \frac{1+2\alpha}{2\alpha} t \right\} \|u_0(x)\|^2. \quad (8.26)$$

*Доказательство.* Рассмотрение снова проведем для общего возмущенного эволюционного уравнения. Уравнение (8.24) удобно переформулировать в виде системы уравнений первого порядка.

Определим вектор  $U = \{u_1, u_2\}$  и пространство  $\mathcal{H}^2$  как прямую сумму пространств  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Сложение в  $\mathcal{H}^2$  проводится по координатам, а скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(U, V) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

Определим  $u_1 = u_\alpha$ ,  $u_2 = du_\alpha/dt$  и запишем уравнение (8.24) в виде системы уравнений первого порядка ( $U_\alpha = \{u_1, u_2\}$ ):

$$\frac{dU_\alpha}{dt} + \mathcal{P}U_\alpha = 0, \quad (8.27)$$

где

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ -\mathcal{A} & \alpha \mathcal{A} \mathcal{A}^* \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Уравнение (8.27) дополняется (см. (8.12), (8.13)) начальными условиями

$$U_\alpha(0) = U_0 = \{u_0, 0\}. \quad (8.29)$$

В силу введенных обозначений

$$\|U_\alpha\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = \|u_\alpha\|^2 + \left\| \frac{du_\alpha}{dt} \right\|^2.$$

Для задачи (8.27)–(8.29) справедлива априорная оценка

$$\|U_\alpha(t)\|^2 \leq \exp \left\{ \frac{1 + 2\alpha}{2\alpha} t \right\} \|U_\alpha(0)\|^2. \quad (8.30)$$

Принимая во внимание (8.28), имеем

$$\mathcal{P}U_\alpha = \{-u_2, -\mathcal{A}u_1 + \alpha \mathcal{A} \mathcal{A}^* u_2\}.$$

Домножая уравнение (8.27) скалярно на  $U_\alpha$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2) + \alpha \|\mathcal{A}^* u_2\|^2 = (\mathcal{A}u_1, u_2) + (u_1, u_2). \quad (8.31)$$

Для правой части используются оценки

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u_1, u_2) &\leq \alpha \|\mathcal{A}^* u_2\|^2 + \frac{1}{4\alpha} \|u_1\|^2, \\ (u_1, u_2) &\leq \varepsilon \|u_2\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|u_1\|^2. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Выбирая  $\varepsilon = 1/2$  и подставляя (8.32) в (8.31), приходим к оценке (8.30).

Из (8.30) и следует оценка (8.26) для решения задачи (8.16)–(8.19), (8.25). ■

### 8.1.3. Разностные схемы метода квазиобращения

Рассмотрим теперь предложенные варианты метода квазиобращения на сеточном уровне. Ограничимся для простоты изложения одномерной граничной задачей. Для перехода к разностной задаче введем равномерную сетку

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

где  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов. Операторы  $A, A^*$  вводятся обычным образом. Пусть в безындексных обозначениях

$$Ay = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ y_{\bar{x}}, & i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

с областью определения

$$D(A) = \{y \mid y(x), x \in \bar{\omega}, y_0 = 0\}.$$

Скалярное произведение и норму в сеточном гильбертовом пространстве  $H = L_2(\omega)$  зададим в виде

$$(z, y) = \sum_{x \in \bar{\omega}} z(x)y(x)h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Для сопряженного оператора  $A^*$  получим

$$A^*y = \begin{cases} -y_x, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & i = N, \end{cases}$$

причем

$$D(A^*) = \{y \mid y(x), x \in \bar{\omega}, y_N = 0\}.$$

Для оператора  $A^*A$  имеем

$$A^*Ay = \begin{cases} -\frac{1}{h}y_x, & i = 0, \\ -y_{\bar{x}x}, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, & i = N. \end{cases}$$

Остановимся вначале на варианте метода квазиобращения (8.11). Разностное решение задачи (8.11)–(8.13) определим из уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} - Ay + \alpha A^*Ay = 0 \quad (8.33)$$

для  $y(x, t) \in H$ , дополненного начальными условиями

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}, \quad (8.34)$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}. \quad (8.35)$$

При приближенном решении задачи (8.33)–(8.35) будем использовать равномерную сетку по времени с шагом  $\tau$ . Рассмотрим разностную схему

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - \frac{1}{2}A(y_n + y_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\alpha}{4} A^* A(y_{n+1} + 2y_n + y_{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.36)$$

Для исследования схемы (8.36) на устойчивость введем обозначения:

$$v_n = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}), \quad w_n = \frac{1}{\tau}(y_n - y_{n-1}). \quad (8.37)$$

Тогда разностная схема (8.36) записывается в виде

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} - Av_n + \frac{\alpha}{2} A^* A(v_{n+1} + v_n) = 0. \quad (8.38)$$

Домножим разностное уравнение (8.38) скалярно на

$$2(v_{n+1} - v_n) = y_{n+1} - y_{n-1} = \tau(w_{n+1} + w_n)$$

и получим

$$\|w_{n+1}\|^2 - \|w_n\|^2 + \alpha \|Av_{n+1}\|^2 - \alpha \|Av_n\|^2 = \tau(Av_n, w_{n+1} + w_n). \quad (8.39)$$

Правая часть (8.39) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} (Av_n, w_{n+1} + w_n) &\leq \beta \|Av_n\|^2 + \frac{1}{4\beta} \|w_{n+1} + w_n\|^2 \leq \\ &\leq \beta \|Av_n\|^2 + \frac{1+\varepsilon}{4\beta} \|w_{n+1}\|^2 + \frac{1+\varepsilon}{4\beta\varepsilon} \|w_n\|^2. \end{aligned}$$

Выберем  $\varepsilon = 1/2$  и подставим это неравенство в (8.39). Это дает

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right) \|w_{n+1}\|^2 + \alpha \|Av_{n+1}\|^2 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{3\tau}{4\beta}\right) \|w_n\|^2 + \alpha \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \|Av_n\|^2. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Используя при  $\tau \leq 4\beta/3$  оценку

$$\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right)^{-1} \leq \exp \left\{ \frac{3\tau}{4\beta} \right\}$$

и выбирая  $\beta = (3\alpha/2)^{1/2}$ , из (8.40) получаем априорную оценку

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right) \|w_{n+1}\|^2 + \alpha \|Av_{n+1}\|^2 \leq \\ &\leq \rho^2 \left( \left(1 - \frac{3\tau}{8\beta}\right) \|w_n\|^2 + \alpha \|Av_n\|^2 \right), \end{aligned} \quad (8.41)$$

где

$$\rho = \exp \left\{ \tau \sqrt{\frac{3}{2\alpha}} \right\}. \quad (8.42)$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

**Теорема 8.3.** Для разностной схемы (8.36) при  $\tau \leq 2(2\alpha/3)^{1/2}$  справедлива оценка (8.37), (8.40).

Вариант метода квазиобращения (8.24) соответствует решению уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - Ay + \alpha AA^* \frac{dy}{dt} = 0$$

с начальными условиями (8.34), (8.35). При численной реализации используется схема

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} - Ay_n + \alpha AA^* \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.43)$$

**Теорема 8.4.** Разностная схема (8.43)  $\rho$ -устойчива с

$$\rho = \exp \left\{ \frac{1 + 4\alpha}{4\alpha} \tau \right\}$$

и для нее справедлива априорная оценка

$$\|y_n\|^2 + \left\| \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} \right\|^2 \leq \rho^2 \left( \|y_{n-1}\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} \right\|^2 \right). \quad (8.44)$$

*Доказательство.* Для получения априорной оценки домножим скалярно разностное уравнение (8.43) на

$$y_i^\circ = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau}$$

и, используя стандартные безындексные обозначения теории разностных схем, придем к равенству

$$(y_{i\bar{i}}, y_i^\circ) - (Ay, y_i^\circ) + \alpha \|A^* y_i^\circ\|^2 = 0. \quad (8.45)$$

Для первых двух членов левой части (8.45) имеем

$$(y_{i\bar{i}}, y_i^\circ) = \frac{1}{2} (y_{i\bar{i}}, y_{i\bar{i}})_t, \quad (8.46)$$

$$(Ay, y_i^\circ) \leq \alpha \|A^* y_i^\circ\|^2 + \frac{1}{4\alpha} \|y\|^2.$$

Подставляя (8.46) в (8.45), приходим к неравенству

$$(y_{i\bar{i}}, y_{i\bar{i}})_t \leq \frac{1}{2\alpha} \|y\|^2. \quad (8.47)$$



Добавим в правую и левую части неравенства (8.47) слагаемое

$$\begin{aligned} (\|y\|^2)_i &= \frac{1}{\tau} (\|y_n\|^2 - \|y_{n-1}\|^2) = \\ &= \left( y_n + y_{n-1}, \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} \right) = 2(y_{n-1}, y_i) + \tau \|y_i\|^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение

$$\|y\|^2 = \|y_{n-1} + \tau y_i\|^2 \leq (1 + \varepsilon) \|y_{n-1}\|^2 + \left(1 + \frac{1}{4\varepsilon}\right) \tau^2 \|y_i\|^2$$

и неравенство

$$(y_{n-1}, y_i) \leq \beta \|y_{n-1}\|^2 + \frac{1}{4\beta} \|y_i\|^2,$$

из (8.47) получим неравенство

$$\begin{aligned} (\|y_{n-1}\|^2 + \|y_i\|^2)_t &\leq \\ &\leq \left( \frac{1 + \varepsilon}{2\alpha} + 2\beta \right) \|y_{n-1}\|^2 + \left( \frac{1}{2\beta} + \tau + \frac{\tau^2}{2\alpha} \frac{1 + 4\varepsilon}{4\varepsilon} \right) \|y_i\|^2, \end{aligned} \quad (8.48)$$

справедливое при любых положительных  $\varepsilon$  и  $\beta$ .

Выберем  $\varepsilon = \tau/2$ ,  $\beta = 1/2$  и получим

$$\begin{aligned} \frac{1 + \varepsilon}{2\alpha} + 2\beta &= 1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{\tau}{4\alpha} < \frac{1}{\tau} (\rho^2 - 1), \\ \frac{1}{2\beta} + \tau + \frac{\tau^2}{2\alpha} \frac{1 + 4\varepsilon}{4\varepsilon} &= 1 + \tau + \frac{\tau}{4\alpha} + \frac{\tau^2}{2\alpha} < \frac{1}{\tau} (\rho^2 - 1), \end{aligned}$$

где величина  $\rho$  определена в условиях теоремы. С учетом этих неравенств из (8.48) и следует необходимая оценка (8.44). ■

#### 8.1.4. Программа

Численно решается граничная обратная задача (8.1)–(8.4). В рамках квазиреального вычислительного эксперимента для формулирования граничного условия (8.2) рассматривается прямая задача для определения  $v(x, t)$  из уравнения (8.1), начального условия (8.4), граничного условия (8.3) на левой границе и условия

$$v(l, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T,$$

на правой границе. Для нахождения приближенного решения используется чисто неявная разностная схема.

Приближенное решение обратной задачи находится с использованием метода квазиобращения в варианте (8.24). В исходных переменных это соответствует решению задачи (см. (8.16)–(8.19), (8.25))

$$\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 v_\alpha}{\partial t^2 \partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

$$v_\alpha(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T,$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$v_\alpha(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}(x, T) = 0, \quad 0 < x < l.$$

Эта краевая задача решается с использованием разностной схемы (8.43).

Параметр регуляризации  $\alpha$  определяется по невязке. Считается, что погрешность во входных данных (в задании  $\varphi(t)$ ) играет определяющую роль и поэтому погрешности аппроксимации при выборе параметра регуляризации не учитываются.

### Программа PROBLEM15

```

C
C   PROBLEM15 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ
C                   НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-N, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.01D0, N = 101, M = 101 )
C   DIMENSION X(N), Y(N,M), F(N,M), YY(M),
+             FI(M), FID(M), FIY(M), Q(M), QA(M),
+             A(M), B(M), C(M), FF(M) ! M >= N
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   N      - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TMAX  - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C   M      - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   FI(M) - ТОЧНОЕ РАЗНОСТНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ;
C   FID(M) - ВОЗМУЩЕННОЕ РАЗНОСТНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ;
C   Q(M)   - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ);
C   QA(M)  - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   XL = 0.0D0
C   XR = 1.0D0
C   TMAX = 1.0D0
C

```

```

OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
  H = (XR - XL) / (N - 1)
  DO I = 1, N
    X(I) = XL + (I-1)*H
  END DO
  TAU = TMAX / (M-1)
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C   ГРАНИЧНЫЙ РЕЖИМ
C
  DO K = 1, M
    T = (K-1)*TAU
    Q(K) = AF(T, TMAX)
  END DO
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
  T = 0.DO
  DO I = 1, N
    Y(I,1) = 0.DO
  END DO
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
  DO K = 2, M
    T = T + TAU
  END DO
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ СХЕМА
C
  DO I = 2, N-1
    A(I) = 1.DO / (H*H)
    B(I) = 1.DO / (H*H)
    C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
    FF(I) = Y(I,K-1) / TAU
  END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
  B(1) = 2.DO / (H*H)
  C(1) = B(1) + 1.DO / TAU
  FF(1) = Y(1,K-1) / TAU
  A(N) = 0.DO
  C(N) = 1.DO
  FF(N) = Q(K)
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
  ITASK = 1

```

```

      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO I = 1, N
        Y(I,K) = YY(I)
      END DO
END DO
C
C      РЕШЕНИЕ НА ЛЕВОЙ ГРАНИЦЕ
C
      DO K = 1, M
        FI(K) = Y(1,K)
        FID(K) = FI(K)
      END DO
C
C      ЗАШУМЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
C
      DO K = 2, M
        FID(K) = FI(K) + 2.DO*DELTA*(RAND(O)-0.5DO)
      END DO
C
C      ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C      МЕТОД КВАЗИОБРАЩЕНИЯ
C      ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
C
      IT = 0
      ITMAX = 100
      ALPHA = 0.001DO
      QQ = 0.75DO
100 IT = IT + 1
C
C      НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ
C      (ЛЕВАЯ ГРАНИЦА)
C
      DO K = 2, M
        Y(1,K) = FID(K)
        Y(2,K) = FID(K) + 0.5DO*H**2*(FID(K)-FID(K-1))/TAU
      END DO
C
C      НОВЫЙ СЛОЙ
C
      DO I = 3, N
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
        DO K = 2, M-1
          A(K) = ALPHA / (H*TAU**2)
          B(K) = ALPHA / (H*TAU**2)
          C(K) = A(K) + B(K) + 1.DO / (H*H)
          FF(K) = (Y(I-1,K)-Y(I-1,K-1))/TAU
+             + (2.DO*Y(I-1,K) - Y(I-2,K))/(H*H)
+             - A(K)*(Y(I-2,K+1)-2.DO*Y(I-2,K)+Y(I-2,K-1))
        END DO
C

```

```

C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ СНИЗУ И СВЕРХУ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      FF(1) = 0.DO
      A(M) = ALPHA / (H*TAU**2)
      C(M) = A(M) + 1.DO / (H*H)
      FF(M) = (Y(I-1,M)-Y(I-1,M-1))/TAU
+      + (2.DO*Y(I-1,M) - Y(I-2,M))/(H*H)
+      - A(M)*(-Y(I-2,M)+Y(I-2,M-1))
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( M, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO K = 1, M
          Y(I,K) = YY(K)
      END DO
END DO
C
C   РЕШЕНИЕ
C
      DO K = 1, M
          QA(K) = Y(N,K)
      END DO
C
C   РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ С НАЙДЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N
          Y(I,1) = 0.DO
      END DO
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 2, M
          T = T + TAU
      END DO
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
      DO I = 2, N-1
          A(I) = 1.DO / (H*H)
          B(I) = 1.DO / (H*H)
          C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
          FF(I) = Y(I,K-1) / TAU
      END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 2.DO / (H*H)
      C(1) = B(1) + 1.DO / TAU
      FF(1) = Y(1,K-1) / TAU

```

```

      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      FF(N) = QA(K)
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, FF, YY, ITASK )
      DO I = 1, N
          Y(I,K) = YY(I)
      END DO
END DO
C
C   КРИТЕРИЙ ВЫХОДА ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА
C
      SUM = 0.DO
      DO K = 1, M
          FIY(K) = Y(1,K)
          SUM = SUM + (FIY(K) - FID(K))**2*TAU
      END DO
      SL2 = DSQRT(SUM)
C
      IF (IT.GT.ITMAX) STOP
      IF (IT.EQ.1) THEN
          IND = 0
          IF (SL2.LT.DELTA) THEN
              IND = 1
              QQ = 1.DO/QQ
          END IF
          ALPHA = ALPHA*QQ
          GO TO 100
      ELSE
          ALPHA = ALPHA*QQ
          IF (IND.EQ.0 .AND. SL2.GT.DELTA) GO TO 100
          IF (IND.EQ.1 .AND. SL2.LT.DELTA) GO TO 100
      END IF
C
C   ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ
C
      WRITE ( 01,* ) (Q(K), K = 1,M)
      WRITE ( 01,* ) (FID(K), K = 1,M)
      WRITE ( 01,* ) (QA(K), K = 1,M)
      WRITE ( 01,* ) (FIY(K), K = 1,M)
      CLOSE ( 01 )
      STOP
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION AF ( T, TMAX )
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОЙ ГРАНИЦЕ
C

```

```

AF = 2.DO*T/TMAX
IF (T.GT.(0.5DO*TMAX)) AF = 2.DO*(TMAX-T)/TMAX

```

C

```

RETURN
END

```

### 8.1.5. Примеры расчетов

В качестве основной использовалась равномерная сетка с  $h = 0,01$ ,  $\tau = 0,01$  для задачи с  $l = 1$ ,  $T = 1$ . При реализации квазиреального эксперимента для прямой задачи граничное условие на правом конце задается в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ \frac{2(T-t)}{T}, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

На рис. 8.1 показаны линии уровня для решения прямой задачи при выбранных граничных условиях.

Нас интересует, прежде всего, влияние погрешностей в задании граничных условий на точность решения обратной задачи. На рис. 8.2

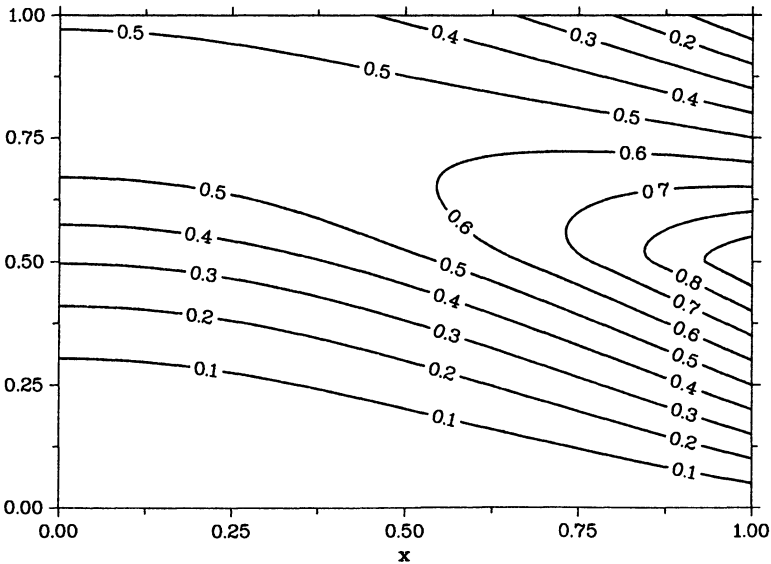


Рис. 8.1. Решение прямой задачи

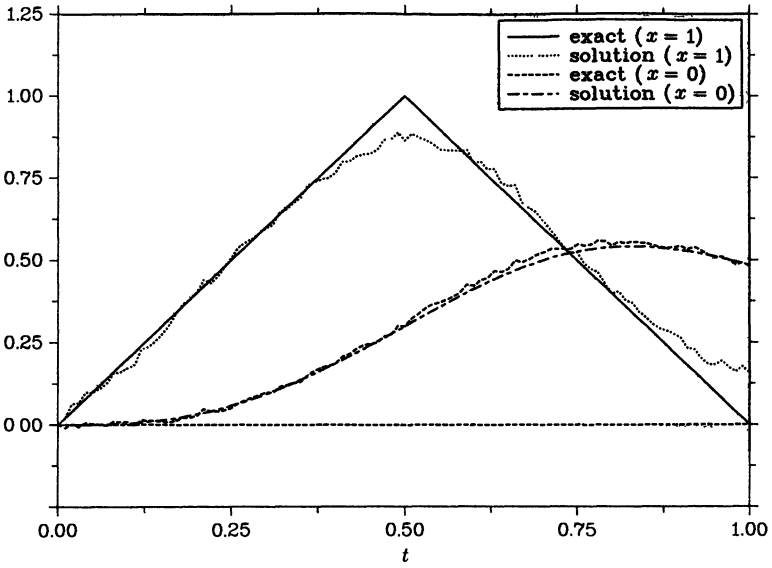


Рис. 8.2. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

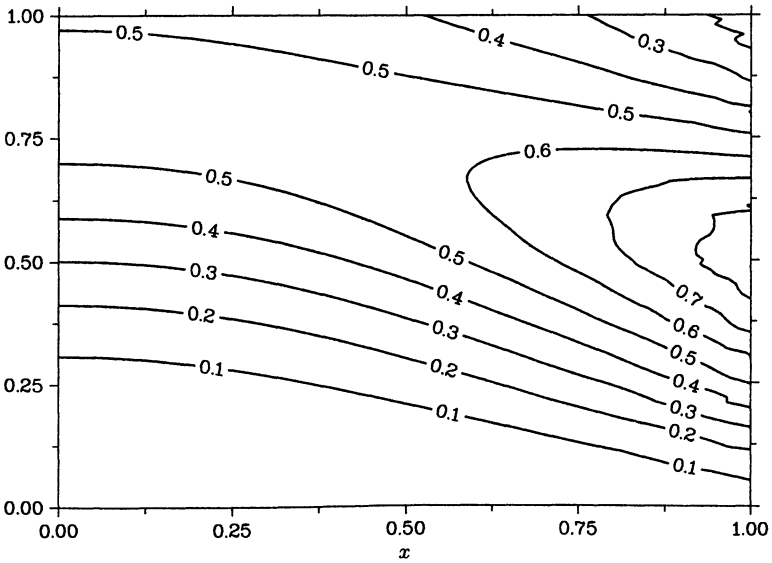


Рис. 8.3. Решение прямой задачи при найденных краевых условиях



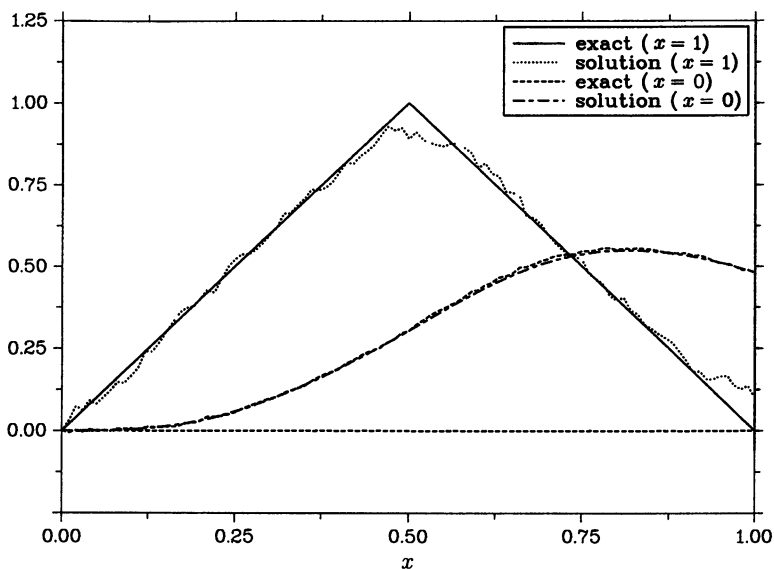


Рис. 8.4. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$

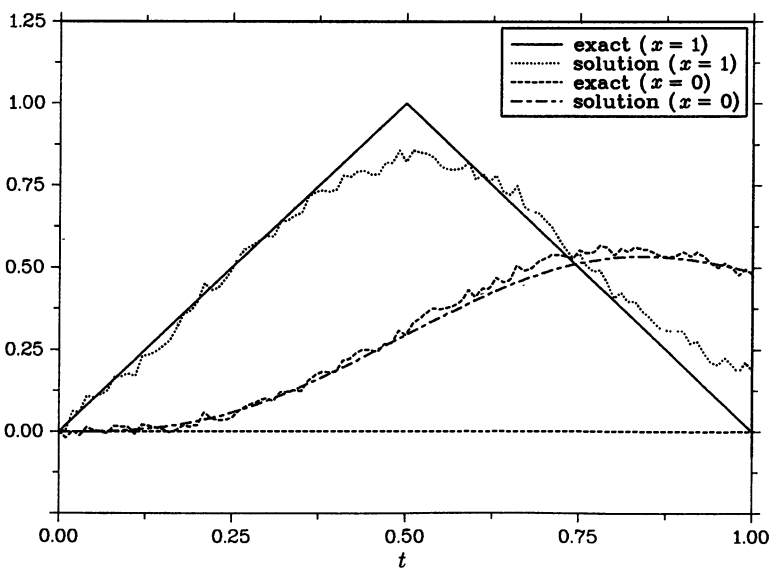


Рис. 8.5. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,02$

показано решение обратной задачи при уровне погрешностей, определяемом величиной  $\delta = 0,01$ . Изображены точные и возмущенные решения на левой границе (при  $x = 0$ ) — входные данные для решения обратной задачи. По этим условиям восстанавливается решение при всех  $0 < x \leq l$  — представлены точные и найденные решения при  $x = 1$ . Решение прямой задачи при найденном краевом условии при  $x = 1$  показано на рис. 8.3 (ср. с рис. 8.1). Влияние уровня погрешностей иллюстрируется на рис. 8.4, 8.5.

## 8.2. Нелокальное возмущение граничных условий

Для приближенного решения граничной обратной задачи для одномерного параболического уравнения применяется вычислительный алгоритм, основанный на нелокальном возмущении граничного условия. Такой подход можно связать с локальной регуляризацией по А. Н. Тихонову.

### 8.2.1. Модельная задача

Будем считать, что исследуемый процесс описывается одномерным параболическим уравнением второго порядка. Соответствующая прямая задача формулируется следующим образом.

Решение  $u(x, t)$  определяется в прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.49)$$

при обычных ограничениях  $k(x) \geq \kappa > 0$ . Граничные и начальные условия возьмем в виде

$$k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.50)$$

$$u(l, t) = \psi(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (8.51)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.52)$$

Будем рассматривать граничную обратную задачу, которая характеризуется тем, что граничное условие на правой границе не задано (функция  $\psi(t)$  в (8.51) неизвестна). Вместо этого задано дополнительное условие на левой границе

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (8.53)$$

Причем, как это бывает на практике, это граничное условие задается с погрешностью.

### 8.2.2. Нелокальная краевая задача

Среди возможных подходов к приближенному решению обратных задач для эволюционных уравнений мы выделили методы с возмущением исходного уравнения и методы с возмущением начальных (граничных) условий. Вариант метода квазиобращения с переходом к корректной задаче для возмущенного уравнения мы реализовали выше, рассматривая пространственную переменную как эволюционную. Представляет интерес также вариант с возмущением граничных (начальных, при интерпретации переменной  $x$  как эволюционной) условий.

Приближенное решение граничной обратной задачи (8.49), (8.50), (8.52), (8.53) обозначим  $u_\alpha(x, t)$  и будем определять его из уравнения

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (8.54)$$

Граничное условие (8.50) и начальное (8.52) оставляем без изменений:

$$k(0) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.55)$$

$$u_\alpha(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.56)$$

Граничное условие (8.53), с которым связана некорректность рассматриваемой обратной задачи (8.49), (8.50), (8.52), (8.53), заменим на нелокальное:

$$u_\alpha(0, t) + \alpha u_\alpha(l, t) = \varphi(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (8.57)$$

В (8.54)–(8.57) переход к нелокальной краевой задаче осуществляется непосредственно. Вторая возможность формулирования подобной неклассической задачи может базироваться на рассмотрении метода регуляризации А. Н. Тихонова для задачи (8.54)–(8.57), рассматривая ее как задачу граничного управления (граничное условие на правом конце — (8.51)) с граничным наблюдением (на левом конце — (8.53)). Далее можно попытаться сформулировать соответствующее уравнение Эйлера, которое, как мы видели, приводит к неклассическим краевым задачам. Необходимо только иметь в виду, что в рассматриваемом случае и для основного, и для сопряженного состояния мы имеем эволюционные задачи с несамосопряженными операторами.

### 8.2.3. Локальная регуляризация

Как мы уже неоднократно отмечали выше, при применении методов регуляризации для эволюционных задач имеются две возможности. В ме-

годах глобальной регуляризации решение определяется на все моменты времени одновременно, в методах локальной регуляризации решение зависит только от предыстории и может определяться последовательно на отдельные моменты времени. Методы локальной регуляризации наиболее полно учитывают специфику обратных задач для эволюционных задач.

По времени введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\}$$

и пусть  $u^n(x) = u(x, t_n)$ . При приближенном решении обратной задачи (8.54)–(8.57) переход на новый временной слой будем осуществлять с использованием чисто неявной схемы для прямой задачи:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.58)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$k(x) \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.59)$$

$$u^{n+1}(l) = v^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.60)$$

$$u^0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.61)$$

При использовании регуляризации А. Н. Тихонова на каждом временном слое для определения граничного условия на правой границе (см. (8.60)) ищется минимум сглаживающего функционала

$$J_\alpha(v^{n+1}) = (u^{n+1}(0) - \varphi^{n+1})^2 + \alpha(v^{n+1})^2. \quad (8.62)$$

Покажем, что задача минимизации функционала (8.62) при ограничениях (8.58)–(8.61) фактически эквивалентна решению сеточной задачи с нелокальными краевыми условиями типа (8.57) на каждом временном слое.

Представим решение задачи (8.58)–(8.60) в виде

$$u^{n+1}(x) = z^{n+1}(x) + w^{n+1}(x). \quad (8.63)$$

В этом представлении  $z^{n+1}(x)$  есть решение сеточной задачи

$$\frac{z^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial z^{n+1}}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.64)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$k(0) \frac{\partial z^{n+1}}{\partial x}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.65)$$

$$z^{n+1}(l) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.66)$$

$$z^0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.67)$$

Тем самым  $z^{n+1}(x)$  есть решение прямой задачи с однородным условием первого рода на правой границе.

Из (8.63) и (8.64)–(8.67) для  $w^{n+1}(x)$  имеем

$$\frac{w^{n+1}}{\tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.68)$$

$$n = 0, 1, \dots, N_0 - 1,$$

$$k(0) \frac{\partial w^{n+1}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.69)$$

$$w^{n+1}(l) = v^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.70)$$

$$w^0(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.71)$$

Принимая во внимание линейность и независимость коэффициента  $k(x)$  от времени, для решения сеточной задачи (8.68)–(8.71) получим представление

$$w^{n+1}(x) = q(x)v^{n+1}, \quad (8.72)$$

где  $q(x)$  есть решение сеточной задачи

$$\frac{q}{\tau} - \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{dq}{dx} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8.73)$$

$$k(0) \frac{dq}{dx}(0) = 0, \quad q(l) = 1. \quad (8.74)$$

Подстановка (8.63), (8.72) в (8.62) дает

$$J_\alpha(v^{n+1}) = (z^{n+1}(0) + q(0)v^{n+1} - \varphi^{n+1})^2 + \alpha(v^{n+1})^2. \quad (8.75)$$

Минимум (8.75) достигается при

$$(z^{n+1}(0) + q(0)v^{n+1} - \varphi^{n+1})q(0) + \alpha v^{n+1} = 0. \quad (8.76)$$

Тем самым для граничного условия на правой границе получим

$$v^{n+1} = q(0) \frac{\varphi^{n+1} - z^{n+1}(0)}{\alpha + q^2(0)}. \quad (8.77)$$

В алгоритме локальной регуляризации при решении обратной задачи (8.54)–(8.57) переход на новый временной слой основан на решении прямых задач (8.64)–(8.67) и (8.73), (8.74), вычислении постоянной  $v^{n+1}$

согласно (8.76) и использовании представления (8.63), (8.72) для решения обратной задачи.

В силу принципа максимума для задачи (8.64)–(8.67) имеем  $q(0) > 0$  и поэтому условию (8.76) можно придать (см. (8.70)) форму

$$u^{n+1}(0) + \frac{\alpha}{q(0)} u^{n+1}(l) = \varphi^{n+1}. \quad (8.78)$$

Тем самым задача минимизации функционала (8.62) при ограничениях (8.58)–(8.61) эквивалентна решению задачи с нелокальными граничными условиями (8.58), (8.59), (8.61), (8.77). Принимая все это во внимание, можно сказать, что алгоритм локальной регуляризации является дискретным вариантом метода нелокального возмущения граничных условий (8.54)–(8.57) для приближенного решения граничной обратной задачи (8.49), (8.50), (8.52), (8.53).

#### 8.2.4. Разностная нелокальная задача

Дифференциальной задаче с нелокальным граничным условием (8.54)–(8.57) поставим в соответствие разностную задачу. По пространственной переменной введем равномерную сетку  $\bar{\omega}$  с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$ :

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\},$$

в которой  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов.

Во внутренних узлах при использовании чисто неявной схемы уравнение (8.54) будем аппроксимировать разностным уравнением

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} - (ay_{\bar{x}}^{n+1})_x = 0, \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.79)$$

где, например,  $a(x) = k(x - 0,5h)$ . Начальное условие (8.56) дает

$$y^0(x) = 0, \quad x \in \omega. \quad (8.80)$$

Граничное условие второго рода (8.55) аппроксимируется на решениях уравнения (8.54):

$$\frac{y_0^{n+1} - y_0^n}{\tau} - \frac{2}{h} a_1 \frac{y_1^{n+1} - y_0^{n+1}}{h} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (8.81)$$

Нелокальному граничному условию (8.57) поставим в соответствие разностное нелокальное условие

$$y_0^{n+1} + \alpha y_N^{n+1} = \varphi^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (8.82)$$

Реализация разностной схемы (8.79)–(8.82) связана с решением трехточечной сеточной задачи на каждом временном слое с нелокальными граничными условиями (8.82). С этой целью можно использовать модифицированный стандартного алгоритма прогонки. Вторая возможность рассматривалась нами при обсуждении локальной регуляризации и связана с использованием специального представления решения (см. (8.63), (8.72)).

Будем искать решение разностной задачи (8.79)–(8.82) в виде

$$y^{n+1}(x) = z^{n+1}(x) + q(x)v^{n+1}, \quad x \in \bar{\omega}. \quad (8.83)$$

Здесь аналогично (8.64)–(8.67) сеточная функция  $z^n(x)$  определяется из решения следующей прямой задачи:

$$\frac{z^{n+1} - y^n}{\tau} - (az_{\bar{x}}^{n+1})_x = 0, \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.84)$$

$$z^0(x) = 0, \quad x \in \omega, \quad (8.85)$$

$$\frac{z_0^{n+1} - y_0^n}{\tau} - \frac{2}{h} a_1 \frac{z_1^{n+1} - z_0^{n+1}}{h} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.86)$$

$$z_N^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (8.87)$$

Сеточная функция  $q(x)$  (см. (8.73), (8.74)) определяется как решение краевой задачи

$$\frac{q}{\tau} - (aq_{\bar{x}})_x = 0, \quad x \in \omega, \quad (8.88)$$

$$\frac{q_0}{\tau} - \frac{2}{h} \frac{q_1 - q_0}{h} = 0, \quad q_N = 1. \quad (8.89)$$

Подстановка (8.83) в (8.82) дает

$$v^{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - z_0^{n+1}}{\alpha + q_0}, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (8.90)$$

Для нахождения решения сеточной задачи (8.79)–(8.82) решаются две стандартные задачи (8.84)–(8.87) и (8.88), (8.89), находится  $v^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  по формуле (8.90), после чего искомое решение представляется в виде (8.83).

### 8.2.5. Программа

Описанный алгоритм решения граничной обратной задачи (8.49), (8.50), (8.52), (8.53) на основе нелокального возмущения граничного условия реализован в программе PROBLEM16.

## Программа PROBLEM16

```

C
C   PROBLEM16 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ
C               НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               НЕЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.01D0, N = 101, M = 21 )
C   DIMENSION X(N), Y(N), Z(N), Q(N),
+           FI(M), FID(M), FIY(M), U(M), UA(M),
+           A(N), B(N), C(N), F(N)
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   XL, XR - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C   N      - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TMAX  - МАКСИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ;
C   M     - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   FI(M) - ТОЧНОЕ РАЗНОСТНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ;
C   FID(M) - ВОЗМУЩЕННОЕ РАЗНОСТНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ;
C   U(M)  - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ);
C   UA(M) - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   XL = 0.D0
C   XR = 1.D0
C   TMAX = 1.D0
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H = (XR - XL) / (N - 1)
C   DO I = 1, N
C     X(I) = XL + (I-1)*H
C   END DO
C   TAU = TMAX / (M-1)
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C   ГРАНИЧНЫЙ РЕЖИМ
C
C   DO K = 1, M
C     T = (K-1)*TAU
C     U(K) = AF(T, TMAX)
C   END DO
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
C   T = 0.D0
C   DO I = 1, N
C     Y(I) = 0.D0
C   END DO

```



```

C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
DO K = 2, M
    T = T + TAU
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ СХЕМА
C
    DO I = 2, N-1
        A(I) = 1.DO / (H*H)
        B(I) = 1.DO / (H*H)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        F(I) = Y(I) / TAU
    END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
    B(1) = 2.DO / (H*H)
    C(1) = B(1) + 1.DO / TAU
    F(1) = Y(1) / TAU
    A(N) = 0.DO
    C(N) = 1.DO
    F(N) = U(K)
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
    ITASK = 1
    CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Y, ITASK )
C
C   РЕШЕНИЕ НА ЛЕВОЙ ГРАНИЦЕ
C
    FI(K) = Y(1)
    FID(K) = FI(K)
END DO
C
C   ЗАШУМЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
C
DO K = 2, M
    FID(K) = FI(K) + 2.DO*DELTA*(RAND(0)-0.5DO)
END DO
C
C   ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C   НЕЛОКАЛЬНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ
C
C   ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СЕТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
DO I = 2, N-1
    A(I) = 1.DO / (H*H)
    B(I) = 1.DO / (H*H)

```

```
      C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
      F(I) = 0.DO
END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 2.DO / (H*H)
      C(1) = B(1) + 1.DO / TAU
      F(1) = 0.DO
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      F(N) = 1.DO
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Q, ITASK )
C
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПО ВЫБОРУ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
C
      IT = 0
      ITMAX = 100
      ALPHA = 0.001DO
      QQ = 0.75DO
100  IT = IT + 1
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N
        Y(I) = 0.DO
      END DO
      UA(1) = Y(N)
C
C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 2, M
        T = T + TAU
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ СХЕМА
C
      DO I = 2, N-1
        A(I) = 1.DO / (H*H)
        B(I) = 1.DO / (H*H)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        F(I) = Y(I) / TAU
      END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 2.DO / (H*H)
      C(1) = B(1) + 1.DO / TAU
```

```

      F(1) = Y(1) / TAU
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      F(N) = 0.DO
C
C      РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Z, ITASK )
C
C      РЕШЕНИЕ НА ПРАВОЙ ГРАНИЦЕ
C
      UA(K) = (FID(K) - Z(1)) / (ALPHA + Q(1))
C
C      РЕШЕНИЕ ВО ВСЕХ УЗЛАХ
C
      DO I = 1, N
        Y(I) = Z(I) + Q(I)*UA(K)
      END DO
      END DO
C
C      РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ С НАЙДЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N
        Y(I) = 0.DO
      END DO
      FIY(1) = Y(1)
C
C      НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 2, M
        T = T + TAU
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
      DO I = 2, N-1
        A(I) = 1.DO / (H*H)
        B(I) = 1.DO / (H*H)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        F(I) = Y(I) / TAU
      END DO
C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ И ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 2.DO / (H*H)
      C(1) = B(1) + 1.DO / TAU
      F(1) = Y(1) / TAU
      A(N) = 0.DO
      C(N) = 1.DO
      F(N) = UA(K)
C

```

```

C      РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      ITASK = 1
      CALL PROG3 ( N, A, C, B, F, Y, ITASK )
      FIY(K) = Y(1)
      END DO

C
C      КРИТЕРИЙ ВЫХОДА ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА
C
      SUM = 0.DO
      DO K = 1, M
          SUM = SUM + (FIY(K) - FID(K))**2*TAU
      END DO
      SL2 = DSQRT(SUM)

C
      IF (IT.GT.ITMAX) STOP
      IF (IT.EQ.1) THEN
          IND = 0
          IF (SL2.LT.DELTA) THEN
              IND = 1
              QQ = 1.DO/SL2
          END IF
          ALPHA = ALPHA*QQ
          GO TO 100
      ELSE
          ALPHA = ALPHA*QQ
          IF (IND.EQ.0 .AND. SL2.GT.DELTA) GO TO 100
          IF (IND.EQ.1 .AND. SL2.LT.DELTA) GO TO 100
      END IF

C
C      ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ
C
      WRITE ( 01,* ) (U(K), K = 1,M)
      WRITE ( 01,* ) (FID(K), K = 1,M)
      WRITE ( 01,* ) (UA(K), K = 1,M)
      WRITE ( 01,* ) (FIY(K), K = 1,M)
      CLOSE ( 01 )
      STOP
      END

      DOUBLE PRECISION FUNCTION AF ( T, TMAX )
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C      ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОЙ ГРАНИЦЕ
C
      AF = 2.DO*T/TMAX
      IF (T.GT.(0.5DO*TMAX)) AF = 2.DO*(TMAX-T)/TMAX

C
      RETURN
      END

```

В приведенной программе реализован алгоритм с нелокальным возмущением граничных условий для задачи (8.49), (8.50), (8.52), (8.53) с коэффициентом  $k(x) = \text{const} = 1$  при выборе параметра нелокального возмущения по невязке.

### 8.2.6. Примеры расчетов

Задача решалась с использованием равномерной сетки с  $h = 0,01$ ,  $\tau = 0,05$  в расчетной области с  $l = 1$ ,  $T = 1$ . Входные данные для решения обратной задачи брались из решения прямой задачи, когда граничное условие на правом конце имеет вид

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ \frac{2(T-t)}{T}, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

Такая же модельная задача рассматривалась нами выше при применении алгоритма с продолжением по пространственной переменной.

Результаты расчетов при различном уровне погрешностей во входных данных показаны на рис. 8.6–8.8. Сравнение с данными по результатам применения алгоритма с продолжением по пространственной переменной

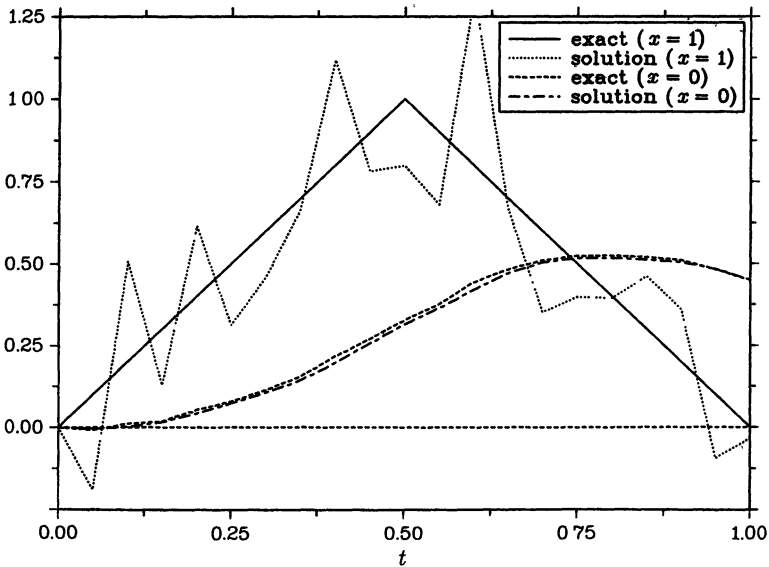
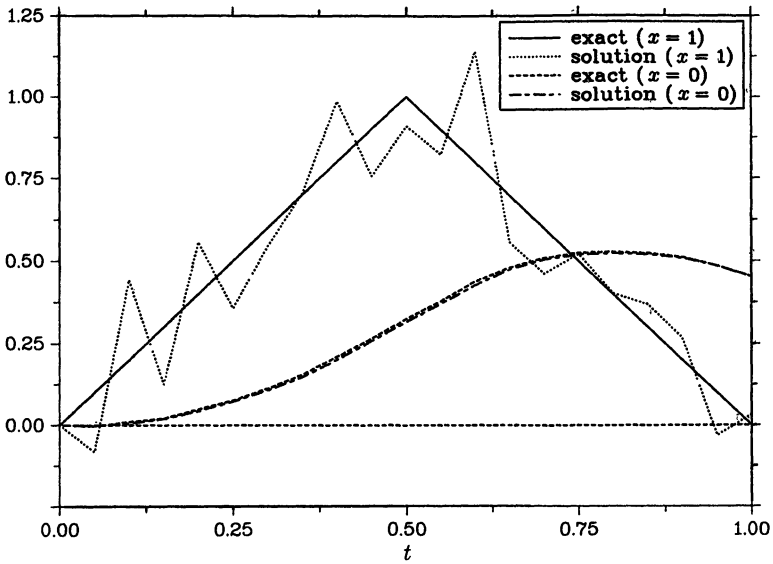
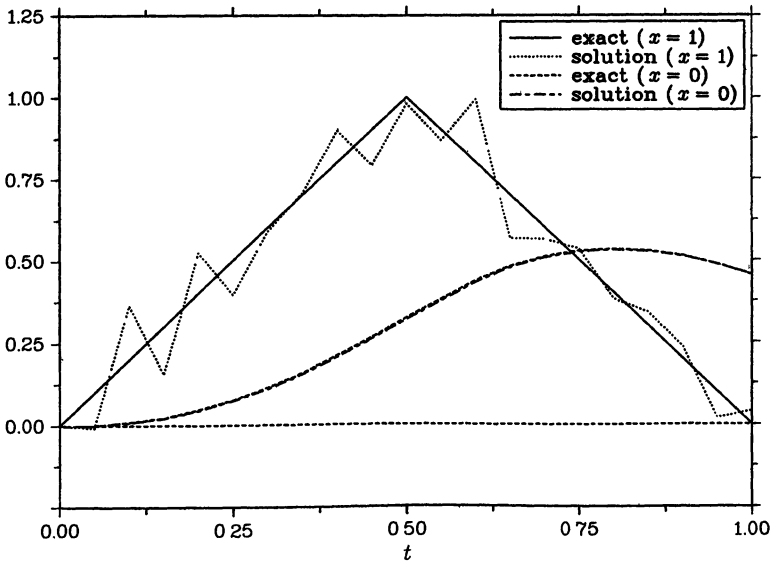


Рис. 8.6. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

Рис. 8.7. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$ Рис. 8.8. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,0025$

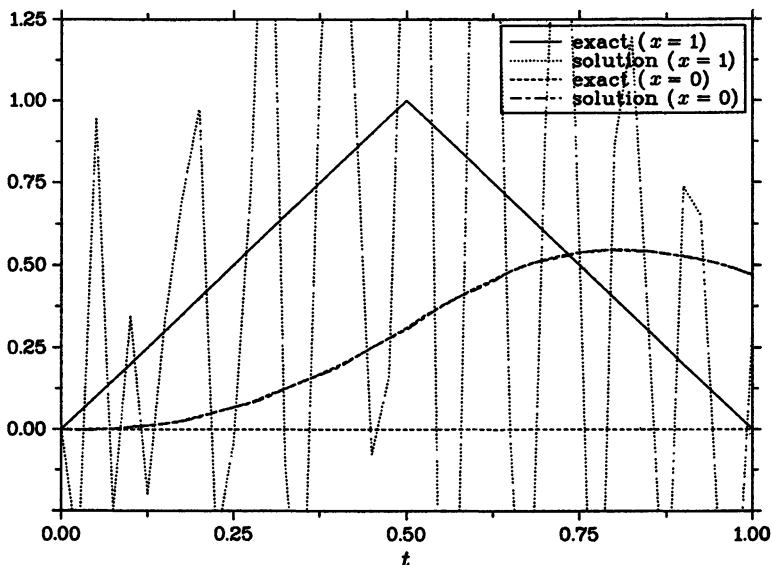


Рис. 8.9. Решение при  $\delta = 0,0025$  и  $\tau = 0,025$

(см. рис. 8.2, 8.4, 8.5) показывает, что алгоритм с нелокальным возмущением граничного условия проигрывает в точности результатов. Это связано с тем, что алгоритм с локальной регуляризацией плохо учитывает специфику рассматриваемых граничных обратных задач. При таком подходе трудно рассчитывать на фильтрацию высокочастотных погрешностей во времени при фактической регуляризации по пространственной переменной.

Эффект регуляризации во многом обеспечивается за счет использования грубых расчетных сеток по времени (эффект саморегуляризации). Иллюстрацией этого утверждения служат данные расчетов с использованием более подробной сетки по времени (рис. 8.9). Погрешности во входных данных более сильно проявляются при уменьшении шага по времени. Это явно прослеживается по расчетной формуле для решения на правой границе, так как  $q_0 \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

### 8.3. Идентификация граничного режима в двумерной задаче

Рассматривается граничная обратная задача для двумерного параболического уравнения второго порядка. По данным на одной части

границы восстанавливается граничный режим на другой части границы. Для приближенного решения задачи применяется итерационный метод. Основное внимание уделяется аккуратному формулированию соответствующего симметризованного операторного уравнения первого рода на дифференциальном и сеточном уровнях.

### 8.3.1. Постановка задачи

К наиболее мощным методам приближенного решения обратных задач для уравнений математической физики относятся итерационные методы, которые достаточно хорошо учитывают общую специфику рассматриваемых проблем. Их корректное применение часто сдерживается проведением определенной аналитической работы, связанной, прежде всего, с тем, что необходимо провести симметризацию соответствующего операторного уравнения первого рода. С аналогичными проблемами мы сталкиваемся при формулировке необходимых условий минимума при применении метода регуляризации А. Н. Тихонова при рассмотрении соответствующей задачи оптимального управления для систем, описываемых уравнениями математической физики. Здесь вопрос о получении симметризованного операторного уравнения рассматривается как на дифференциальном уровне, так и на сеточном.

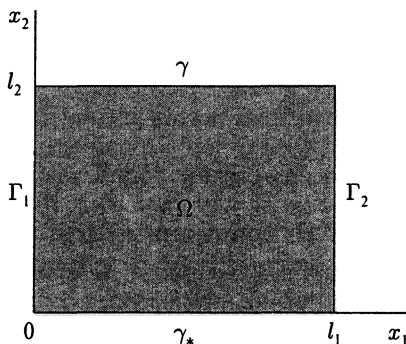


Рис. 8.10. Расчетная область

Рассмотрим в качестве модельной двумерную задачу в прямоугольнике

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\beta < l_\beta, \beta = 1, 2\}.$$

Для сторон прямоугольника  $\Omega$  используем обозначения (см. рис. 8.10)

$$\partial\Omega = \gamma_* \cup \Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

В  $\Omega$  ищется решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T. \quad (8.91)$$

Будем считать, что  $k(x) \geq \kappa$ ,  $\kappa > 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Отправной точкой нашего исследования будет прямая начально-краевая задача для уравнения (8.91), когда краевые и начальные условия



имеют вид

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \gamma_*, \quad (8.92)$$

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (8.93)$$

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = \mu(x_1, t), \quad x \in \gamma, \quad (8.94)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (8.95)$$

Рассматривается обратная задача по идентификации граничного условия на части границы (на  $\gamma$ ). В этом случае вместо (8.94) задается

$$u(x, t) = \varphi(x_1, t), \quad x \in \gamma_*. \quad (8.96)$$

Для приближенного решения граничной обратной задачи (8.91)–(8.93), (8.95), (8.96) будем использовать итерационный метод, который связан с уточнением граничного условия типа (8.94).

### 8.3.2. Итерационный метод

Запишем рассматриваемую граничную обратную задачу как операторное уравнение первого рода. Заданному граничному условию (8.94) ставится в соответствие (8.96), т. е.

$$\mathcal{A}\mu = \varphi. \quad (8.97)$$

Линейный оператор  $\mathcal{A}$  определен для функций, заданных на части границы  $\gamma$ , а его значения суть функции, заданные на другой части границы (на  $\gamma_*$ ). Для вычисления значений оператора решается краевая задача (8.91)–(8.95).

Для приближенного решения некорректной задачи (8.97) применяем итерационный метод. Он основан на переходе к задаче с симметричным оператором, когда вместо (8.97) решается уравнение

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A}\mu = \mathcal{A}^* \varphi. \quad (8.98)$$

При использовании явного итерационного метода для (8.98) имеем

$$\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{s_{k+1}} - \mathcal{A}^* \mathcal{A}\mu_k = \mathcal{A}^* \varphi, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8.99)$$

Для нестационарных функций, заданных на  $\gamma$  и  $\gamma_*$  определим гильбертовы пространства  $\mathcal{L}(\gamma, [0, T])$ ,  $\mathcal{L}(\gamma_*, [0, T])$  со скалярными произведениями и нормами

$$(u, v) = \int_0^T \int_{\gamma} u(x, t)v(x, t) dx dt, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

$$(u, v)_* = \int_0^T \int_{\gamma_*} u(x, t) v(x, t) dx dt, \quad \|u\|_* = \sqrt{(u, u)_*}$$

соответственно. Итерационные параметры при применении метода скорейшего спуска вычисляются по правилу

$$s_{k+1} = \frac{\|r_k\|^2}{\|Ar_k\|_*^2}, \quad r_k = \mathcal{A}^* \mu_k - \mathcal{A}^* \varphi. \quad (8.100)$$

Остановимся на наиболее важном моменте практического использования итерационного метода (8.99), который связан с вычислением значений сопряженного  $k$   $\mathcal{A}$  оператора. Для функций  $\mu$ ,  $\nu$ , заданных на  $\gamma$  и  $\gamma_*$  соответственно, имеем

$$(\mathcal{A}\mu, \nu)_* = (\mu, \mathcal{A}^*\nu). \quad (8.101)$$

Значения оператора  $\mathcal{A}$  мы получаем как

$$\mathcal{A}\mu = u(x, t), \quad x \in \gamma_*,$$

где  $u(x, t)$  — решение краевой задачи (8.91)–(8.95) (функция  $u(x, t)$  определяет основное состояние системы). Значения сопряженного оператора находятся по функции  $\psi(x, t)$ , которая определяется из решения вспомогательной краевой задачи (сопряженное состояние). Для формулирования этой краевой задачи домножим уравнение (8.91) на  $\psi(x, t)$  и проинтегрируем по  $\Omega$  и времени:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u \right) \psi dx dt = 0, \quad (8.102)$$

где

$$\mathcal{L}u = - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right).$$

Для первого слагаемого в (8.102) имеем

$$I_1 = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \psi dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt, \quad (8.103)$$

если с учетом (8.95) потребовать, чтобы

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (8.104)$$

Подобные преобразования для второго слагаемого в (8.102) с учетом граничных условий (8.92)–(8.94) дают

$$I_2 = \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{L}u\psi \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\gamma} \mu\psi \, dx \, dt + \\ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} uk \frac{\partial\psi}{\partial n} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} u\mathcal{L}\psi \, dx \, dt. \quad (8.105)$$

Граничные условия для сопряженного состояния выберем в виде

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \nu(\mathbf{x}_1, t), \quad \mathbf{x} \in \gamma_*, \quad (8.106)$$

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (8.107)$$

$$k(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma. \quad (8.108)$$

Подстановка (8.103), (8.105) при таких граничных условиях приводит к равенству

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \left( -\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi \right) \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\gamma} \mu\psi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\gamma_*} \nu\psi \, dx \, dt = 0. \quad (8.109)$$

Будем считать, что функция  $\psi(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t < T. \quad (8.110)$$

Тем самым сопряженное состояние определяется как решение прямой задачи (8.104), (8.106)–(8.108), (8.110).

В рассматриваемых условиях из (8.109) получим

$$\int_0^T \int_{\gamma} \mu\psi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\gamma_*} \nu\psi \, dx \, dt.$$

Этому равенству можно придать вид (8.101), при этом для значений оператора  $\mathcal{A}^*$  получаем представление

$$\mathcal{A}^*\nu = \psi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \gamma,$$

где  $\psi(\mathbf{x}, t)$  — решение краевой задачи (8.104), (8.106)–(8.108), (8.110).

### 8.3.3. Сеточная задача

Начнем с того, что сформулируем сеточную задачу, которая соответствует прямой задаче (8.91)–(8.95). С учетом того, что на границе расчетной области заданы граничные условия второго рода, будем использовать разностную сетку, узлы которой сдвинуты на полшага от границы области (рис. 8.11).

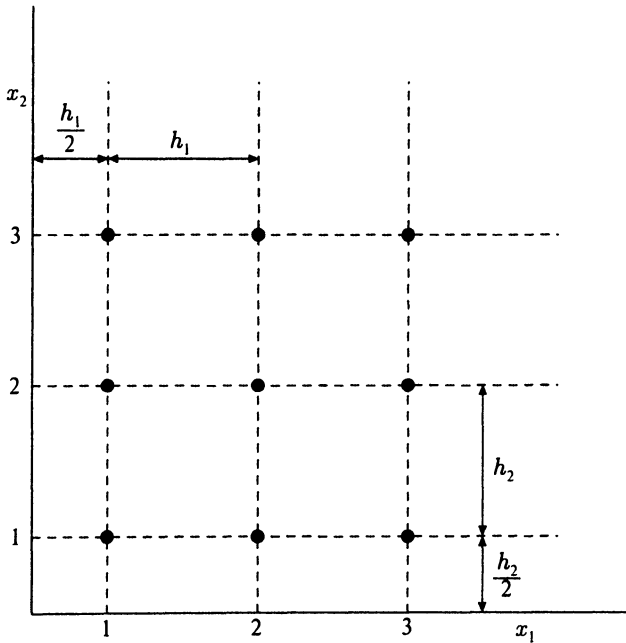


Рис. 8.11. Расчетная сетка по пространству

По каждому направлению  $x_\beta$ ,  $\beta = 1, 2$ , сетка равномерна, и пусть

$$\omega_\beta = \{x_\beta \mid x_\beta = (i_\beta - 0,5)h_\beta, i_\beta = 1, 2, \dots, N_\beta, N_\beta h_\beta = l_\beta\}.$$

Для сетки в прямоугольнике  $\Omega$  используются обозначения  $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ .

Дифференциальному оператору  $\mathcal{L}$  с учетом граничных условий (8.92)–(8.94) поставим в соответствие двумерный разностный оператор, как сумму одномерных:

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2. \quad (8.111)$$

При использовании сдвинутой на полшага сетки разностный оператор  $\Lambda_1$  естественно определить следующим образом:

$$\Lambda_1 y = \begin{cases} -\frac{1}{h_1} a_1(x_1 + h_1, x_2) y_{x_1}, & x_1 = \frac{h_1}{2}, \\ -(a_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1}, & \frac{h_1}{2} < x_1 < l_1 - \frac{h_1}{2}, \\ \frac{1}{h_1} a_1 y_{\bar{x}_1}, & x_1 = l_1 - \frac{h_1}{2}, \end{cases}$$

где, например,  $a_1(x_1, x_2) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2)$ . Аналогично определяется разностный оператор  $\Lambda_2$ :

$$\Lambda_2 y = \begin{cases} -\frac{1}{h_2} a_2(x_1, x_2 + h_2) y_{x_2}, & x_2 = \frac{h_2}{2}, \\ -(a_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}, & \frac{h_2}{2} < x_2 < l_2 - \frac{h_2}{2}, \\ \frac{1}{h_2} a_2 y_{\bar{x}_2}, & x_2 = l_2 - \frac{h_2}{2} \end{cases}$$

при  $a_2(x_1, x_2) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2)$ .

В гильбертовом пространстве  $L_2(\omega)$  сеточных функций, заданных на  $\omega$ , скалярное произведение зададим в виде

$$(y, v)_\omega = \sum_{x \in \omega} y(x)v(x)h_1 h_2.$$

Нетрудно убедиться, что разностный оператор  $\Lambda$ , определенный согласно (8.111), самосопряжен и неотрицателен в  $L_2(\omega)$ , т. е.  $\Lambda = \Lambda^* \geq 0$ .

Обозначим через  $y_n$  разностное решение на момент времени  $t_n = n\tau$ ,  $\tau > 0$  — шаг по времени,  $N_0\tau = T$ . Приближенное решение прямой задачи (8.91)–(8.95) будет искать как решение разностной задачи

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1, \quad (8.112)$$

$$y_0 = 0, \quad x \in \omega. \quad (8.113)$$

Разностная схема с весами (8.112), (8.113) безусловно устойчива при  $\sigma \geq 1/2$ . Мы ограничимся для простоты, чисто неявной схемой ( $\sigma = 1$ ), когда для решения разностной задачи (8.112), (8.113) справедлива следующая оценка устойчивости

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| + \tau \|f_n\|, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Неоднородность правой части разностной схемы (8.112) обусловлена граничными условиями (8.94), так что при  $\sigma = 1$  можно положить:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \in \omega_1, \quad x_2 = \frac{h_2}{2}, \\ 0, & x_1 \in \omega_1, \quad \frac{h_2}{2} < x_2 < l_2 - \frac{h_2}{2}, \\ \frac{1}{h_2} \mu_{n+1}(x_1), & x_1 \in \omega_1, \quad x_2 = l_2 - \frac{h_2}{2}. \end{cases} \quad (8.114)$$

Тем самым граничные условия на операторном уровне включены в сеточное уравнение. С учетом вида неоднородной правой части приведенная выше оценка выражает устойчивость решения разностной задачи по начальным данным и граничным условиям.

Сформулируем теперь на сеточном уровне граничную обратную задачу. В рассматриваемом случае (см. (8.91)–(8.93), (8.95), (8.96)) в правой части (8.114) функция  $\mu_n(x_1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0$  не задана. Вместо нее считается известным решение в узлах, прилегающих к границе  $\gamma_*$ :

$$y_n(x_1, 0, 5h_2) = \varphi_n(x_1), \quad x_1 \in \omega_1, \quad n = 1, 2, \dots, N_0. \quad (8.115)$$

Следовательно на сеточном уровне мы можем говорить о задаче идентификации правой части специального вида (8.114) по граничным наблюдениям (8.115).

#### 8.3.4. Итерационное уточнение граничного условия

Подобно непрерывному случаю будем использовать формулировку рассматриваемой граничной обратной задачи в виде операторного уравнения первого рода. По заданному граничному условию (правой части в форме (8.114) при известной сеточной функции  $\mu_n(x_1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0$ ) ставится в соответствие функция  $\varphi_n(x_1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0$  (см. (8.115)):

$$A\mu = \varphi. \quad (8.116)$$

Для вычисления  $\varphi_n(x_1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_0$ , решается сеточная краевая задача (8.112)–(8.114). Операторное уравнение (8.116) есть сеточный аналог уравнения (8.97).

Итерационный метод применяется к симметризованному уравнению (см. (8.98))

$$A^* A \mu = A^* \varphi. \quad (8.117)$$

Явный итерационный метод для приближенного решения (8.117) запишем в виде

$$\frac{\mu^{k+1} - \mu^k}{s_{k+1}} + A^* A \mu^k = A^* \varphi, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8.118)$$

Отдельного рассмотрения заслуживает проблема вычисления значений оператора  $A^*$ . Для этого необходимо прежде всего указать сеточные аналоги гильбертовых пространств  $\mathcal{L}(\gamma, [0, T])$  и  $\mathcal{L}(\gamma_*, [0, T])$ , которые мы обозначим  $H$  и  $H_*$  соответственно. В  $H$  и  $H_*$  скалярные произведения и нормы зададим соотношениями

$$(u, v) = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x_1 \in \omega_1} u_n(x_1, l_2) v_n(x_1, l_2) h_1 \tau, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

$$(u, v)_* = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x_1 \in \omega_1} u_n(x_1, 0) v_n(x_1, 0) h_1 \tau, \quad \|u\|_* = \sqrt{(u, u)_*}.$$

Тогда в методе скорейшего спуска для итерационных параметров в (8.118) имеем

$$s_{k+1} = \frac{\|r^k\|^2}{\|Ar^k\|_*^2}, \quad r^k = A^* A \mu^k - A^* \varphi. \quad (8.119)$$

Сопряженный к  $A$  оператор определяется из равенства

$$(A\mu, \nu)_* = (\mu, A^* \nu). \quad (8.120)$$

При этом сеточные функции

$$\mu_n(x_1), \quad n = 1, 2, \dots, N_0 \quad \text{и} \quad \nu_n(x_1), \quad n = 1, 2, \dots, N_0$$

заданы в узлах расчетной сетки  $\omega$ , прилегающих к границам  $\gamma$  и  $\gamma_*$  соответственно.

Для формулирования сеточной задачи для сопряженного состояния домножим разностное уравнение для основного состояния

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \Lambda y_{n+1} = f_n \quad (8.121)$$

на сеточную функцию  $\psi_{n+1} h_1 h_2 \tau$  и просуммируем по всем узлам  $x \in \omega$  и всем  $n = 0, 1, \dots, N_0 - 1$ :

$$\sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \Lambda y_n \right) \psi_n h_1 h_2 \tau = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} f_{n-1} \psi_n h_1 h_2 \tau. \quad (8.122)$$

Для правой части (8.122) с учетом (8.114) и введенных обозначений непосредственно получаем

$$\sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} f_{n-1} \psi_n h_1 h_2 \tau = (\mu, \psi). \quad (8.123)$$

Тем самым правую часть можно связать с правой частью соотношения (8.120).

Первое слагаемое в левой части (8.122) преобразуется с учетом начального условия (8.113) следующим образом

$$I_1 = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} \psi_n h_1 h_2 \tau = - \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\tau} y_n h_1 h_2 \tau, \quad (8.124)$$

если потребовать выполнения дополнительно условия

$$\psi_{N_0+1} = 0, \quad x \in \omega. \quad (8.125)$$

Для второго слагаемого в правой части (8.122) с учетом самосопряженности оператора  $\Lambda$  в  $L_2(\omega)$  имеем

$$I_2 = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} \Lambda y_n \psi_n h_1 h_2 \tau = \sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} y_n \Lambda \psi_n h_1 h_2 \tau. \quad (8.126)$$

Подставляя (8.123), (8.124), (8.126) в (8.122) получим

$$\sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} y_n \left( -\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\tau} + \Lambda \psi_n \right) h_1 h_2 \tau = (\mu, \psi). \quad (8.127)$$

Выбор сеточной функции  $\psi_n(x)$  подчиним условию, чтобы левую часть (8.127) можно было бы связать с левой частью (8.120).

Будем считать, что функция  $\psi_n(x)$  удовлетворяет разностному уравнению

$$-\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\tau} + \Lambda \psi_n = g_n, \quad n = 1, 2, \dots, N_0, \quad (8.128)$$

которое дополняется начальным условием (8.125). Следовательно сопряженное состояние при заданной правой части  $g_n(x)$  находится из чисто неявной схемы (8.125), (8.128) на сдвинутой на шаг сетке по времени.

Из (8.127), (8.128) получим

$$\sum_{n=1}^{N_0} \sum_{x \in \omega} y_n g_n h_1 h_2 \tau = (\mu, \psi). \quad (8.129)$$

Левая часть (8.129) с учетом (8.115), (8.116) будет совпадать с левой частью (8.120) при задании правой части разностного уравнения (8.128) в виде

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_2} \nu_n(x_1), & x_1 \in \omega_1, \quad x_2 = \frac{h_2}{2}, \\ 0, & x_1 \in \omega_1, \quad \frac{h_2}{2} < x_2 < l_2 - \frac{h_2}{2}, \\ 0, & x_1 \in \omega_1, \quad x_2 = l_2 - \frac{h_2}{2}. \end{cases} \quad (8.130)$$



Такой выбор правой части соответствует решению сеточной краевой задачи с крайевыми условиями второго рода (см. (8.106)).

Для значений оператора  $A^*$  из равенства правых частей (8.120) и (8.129) получим

$$A^*v_n = \psi_n(x_1, l_2), \quad x_1 \in \omega_1, \quad n = 1, 2, \dots, N_0. \quad (8.131)$$

Здесь сеточная функция  $\psi_n(x)$  определяется как решение разностной задачи (8.125), (8.128), (8.130).

### 8.3.5. Программная реализация

В приведенной ниже программе реализован обсуждаемый итерационный метод решения граничной обратной задачи (8.91)–(8.93), (8.95), (8.96) в случае, когда  $k(x) = 1$ . Выход из итерационного метода проводится по невязке.

#### Программа PROBLEM17

```

C
C   PROBLEM17 - ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C               ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C               ИТЕРАЦИОННОЕ УТОЧНЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-N, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.005D0, N1 = 50, N2 = 50, M = 101 )
C   DIMENSION A(9*N1*N2), X1(N1), X2(N2), T(M),
+           Y(N1,N2), F(N1,N2), G(N1),
+           FI(N1,M), FID(N1,M), FS(N1,M), FIK(N1,M),
+           U(N1,M), UA(N1,M), UK(N1,M), R(N1,M), AR(N1,M)
C   COMMON / SB5 / IDEFAULT(4)
C   COMMON / CONTROL / IREPT, NITER
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   X1L, X2L - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО УГЛА;
C   X1R, X2R - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО УГЛА;
C   N1, N2   - ЧИСЛО УЗЛОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКИ;
C   H1, H2   - ШАГИ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TAU      - ШАГ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   FI(N1,M) - ТОЧНОЕ РАЗНОСТНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ;
C   FID(N1,M) - ВОЗМУЩЕННОЕ РАЗНОСТНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ;
C   U(N1,M)  - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ);
C   UA(N1,M) - ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ;
C   EPSR     - ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C   EPSA     - АБСОЛЮТНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   EQUIVALENCE (A(1),          A0          ),
C   *           (A(N+1),        A1          ),
C   *           (A(2*N+1),      A2          ),

```

```

C
  X1L = 0.DO
  X1R = 1.DO
  X2L = 0.DO
  X2R = 0.5DO
  TMAX = 1.DO
  PI = 3.1415926DO
  EPSR = 1.D-5
  EPSA = 1.D-8
C
  OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
  H1 = (X1R-X1L) / N1
  H2 = (X2R-X2L) / N2
  TAU = TMAX / (M-1)
  DO I = 1, N1
    X1(I) = X1L + (I-0.5DO)*H1
  END DO
  DO J = 1, N2
    X2(J) = X2L + (J-0.5DO)*H2
  END DO
  DO K = 1, M
    T(K) = (K-1)*TAU
  END DO
C
  N = N1*N2
  DO I = 1, 9*N
    A(I) = 0.0
  END DO
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
  DO I = 1, N1
    DO J = 1, N2
      Y(I,J) = 0.DO
    END DO
  END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ
C
  CALL FLUX ( U, X1, T, N1, M )
  DO K = 2, M
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
  DO I = 1, N1
    G(I) = U(I,K)
  END DO

```

```

      CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), F, Y,
+           H1, H2, N1, N2, TAU, G )
C
C  РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT       = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), Y, F, EPSR, EPSA )
C
C  ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
C
      DO I = 1, N1
        FI(I,K) = Y(I,1)
      END DO
      END DO
C
C  ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
      DO I = 1, N1
        DO K = 2, M
          FID(I,K) = FI(I,K) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
        END DO
      END DO
C
C  ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C  ПРАВАЯ ЧАСТЬ СИММЕТРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ
C
C  ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C  ЧИСТО НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
C
C  НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ (ПРИ t = T)
C
      DO I = 1, N1
        DO J = 1, N2
          Y(I,J) = 0.DO
        END DO
      END DO
      DO K = M,2,-1
C
C  КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      DO I = 1, N1
        G(I) = FID(I,K)
      END DO
      CALL FDSS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), F, Y,
+           H1, H2, N1, N2, TAU, G )
C
C  РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT       = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), Y, F, EPSR, EPSA )

```

```

C
C   ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
      DO I = 1, N1
        FS(I,K) = Y(I,N2)
      END DO
END DO

C
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД
C
      IT = 0

C
C   НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
      DO I = 1, N1
        DO K = 2, M
          UK(I,K) = 0.DO
        END DO
      END DO

C
100 IT = IT + 1

C
C   ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ
C
C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      DO I = 1, N1
        DO J = 1, N2
          Y(I,J) = 0.DO
        END DO
      END DO
      DO K = 2, M

C
C   КОЭФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      DO I = 1, N1
        G(I) = UK(I,K)
      END DO
      CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), F, Y,
+             H1, H2, N1, N2, TAU, G )

C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT      = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), Y, F, EPSR, EPSA )

C
C   ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ
C
      DO I = 1, N1
        FIK(I,K) = Y(I,1)
      END DO
END DO

```

```

C      СОПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
C      ЧИСТО НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ (ПРИ  $t = T$ )
C
      DO I = 1, N1
        DO J = 1, N2
          Y(I,J) = 0.DO
        END DO
      END DO
      DO K = M, 2, -1
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      DO I = 1, N1
        G(I) = FIK(I,K)
      END DO
      CALL FDSS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), F, Y,
+              H1, H2, N1, N2, TAU, G )
C
C      РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT      = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), Y, F, EPSR, EPSA )
C
C      НЕВЯЗКА
C
      DO I = 1, N1
        R(I,K) = Y(I,N2) - FS(I,K)
      END DO
      END DO
C
C      МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА
C
C      ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА
C
C      НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      DO I = 1, N1
        DO J = 1, N2
          Y(I,J) = 0.DO
        END DO
      END DO
      DO K = 2, M
C
C      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
      DO I = 1, N1
        G(I) = R(I,K)
      END DO
      CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), F, Y,
+              H1, H2, N1, N2, TAU, G )

```

```

C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
      IDEFAULT(1) = 0
      IREPT      = 0
      CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), Y, F, EPSR, EPSA )
      DO I = 1, N1
        AR(I,K) = Y(I,1)
      END DO
END DO

C
C   ИТЕРАЦИОННЫЙ ПАРАМЕТР
C
SUM1 = 0.DO
SUM2 = 0.DO
DO I = 1, N1
  DO K = 2, M
    SUM1 = SUM1 + R(I,K)*R(I,K)
    SUM2 = SUM2 + AR(I,K)*AR(I,K)
  END DO
END DO
SS = SUM1/SUM2

C
C   НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
DO I = 1, N1
  DO K = 2, M
    UK(I,K) = UK(I,K) - SS*R(I,K)
  END DO
END DO

C
C   ВЫХОД ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПО НЕВЯЗКЕ
C
SUM = 0.DO
DO I = 1, N1
  DO K = 2, M
    SUM = SUM + (FID(I,K) - FIK(I,K))**2*N1*TAU
  END DO
END DO
SUM = SUM/((X1R-X1L)*TMAX)
SL2 = DSQRT(SUM)
IF (SL2.GT.DELTA) GO TO 100

C
C   РЕШЕНИЕ
C
WRITE ( 01, * ) ((UK(I,K), I=1,N1), K=2,M)
WRITE ( 01, * ) ((FID(I,K), I=1,N1), K=2,M)
CLOSE ( 01 )
STOP
END

C
SUBROUTINE FLUX ( U, X1, T, N1, M )

C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ

```

```

      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION U(N1,M), X1(N1), T(M)
      DO I = 1, N1
        DO K = 1, M
          U(I,K) = X1(I)*T(K)/T(M)
C          IF (T(K).GT.0.5DO*T(M)) U(I,K) = 2.DO*X1(I)*(T(M)-T(K))
        END DO
      END DO
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE FDS ( AO, A1, A2, F, U, H1, H2, N1, N2, TAU, G )
C
C      ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C      ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
C      ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧИСТО НЕЯВНОЙ СХЕМЫ
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION AO(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2),
+      F(N1,N2), U(N1,N2), G(N1)
C
      DO J = 2, N2-1
        DO I = 2, N1-1
          A1(I-1,J) = 1.DO/(H1*H1)
          A1(I,J)   = 1.DO/(H1*H1)
          A2(I,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
          A2(I,J)   = 1.DO/(H2*H2)
+          AO(I,J)  = A1(I,J) + A1(I-1,J) + A2(I,J) + A2(I,J-1)
+          + 1.DO/TAU
          F(I,J)    = U(I,J)/TAU
        END DO
      END DO
C
C      ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО РОДА
C
      DO J = 2, N2-1
        A2(1,J)   = 1.DO/(H2*H2)
        A2(1,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
        AO(1,J)   = A1(1,J) + A2(1,J) + A2(1,J-1) + 1.DO/TAU
        F(1,J)    = U(1,J)/TAU
      END DO
C
      DO J = 2, N2-1
        A2(N1,J)   = 1.DO/(H2*H2)
        A2(N1,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
        AO(N1,J)   = A1(N1-1,J) + A2(N1,J) + A2(N1,J-1) + 1.DO/TAU
        F(N1,J)    = U(N1,J)/TAU
      END DO
C
      DO I = 2, N1-1
        A1(I,1)   = 1.DO/(H1*H1)
        A1(I-1,1) = 1.DO/(H1*H1)

```

```

      AO(I,1) = A1(I,1) + A1(I-1,1) + A2(I,1) + 1.DO/TAU
      F(I,1)  = U(I,1)/TAU
      END DO
C
      DO I = 2, N1-1
      A1(I,N2) = 1.DO/(H1*H1)
      A1(I-1,N2) = 1.DO/(H1*H1)
      AO(I,N2) = A1(I,N2) + A1(I-1,N2) + A2(I,N2-1) + 1.DO/TAU
      F(I,N2)  = U(I,N2)/TAU + G(I)/H2
      END DO
C
      AO(1,1) = A1(1,1) + A2(1,1) + 1.DO/TAU
      F(1,1)  = U(1,1)/TAU
C
      AO(N1,1) = A1(N1-1,1) + A2(N1,1) + 1.DO/TAU
      F(N1,1)  = U(N1,1)/TAU
C
      AO(1,N2) = A1(1,N2) + A2(1,N2-1) + 1.DO/TAU
      F(1,N2)  = U(1,N2)/TAU + G(1)/H2
C
      AO(N1,N2) = A1(N1-1,N2) + A2(N1,N2-1) + 1.DO/TAU
      F(N1,N2)  = U(N1,N2)/TAU + G(N1)/H2
C
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE FDSS ( AO, A1, A2, F, U, H1, H2, N1, N2, TAU, G )
C
C   ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ДЛЯ СОПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
C
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
      DIMENSION AO(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2),
+              F(N1,N2), U(N1,N2), G(N1)
C
      DO J = 2, N2-1
      DO I = 2, N1-1
      A1(I-1,J) = 1.DO/(H1*H1)
      A1(I,J)   = 1.DO/(H1*H1)
      A2(I,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
      A2(I,J)   = 1.DO/(H2*H2)
      AO(I,J)   = A1(I,J) + A1(I-1,J) + A2(I,J) + A2(I,J-1)
+              + 1.DO/TAU
      F(I,J)    = U(I,J)/TAU
      END DO
      END DO
C
C   ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО РОДА
C
      DO J = 2, N2-1
      A2(1,J)   = 1.DO/(H2*H2)
      A2(1,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
      AO(1,J)   = A1(1,J) + A2(1,J) + A2(1,J-1) + 1.DO/TAU

```



```

      F(1,J)    = U(1,J)/TAU
    END DO
C
    DO J = 2, N2-1
      A2(N1,J)  = 1.DO/(H2*H2)
      A2(N1,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
      AO(N1,J)  = A1(N1-1,J) + A2(N1,J) + A2(N1,J-1) + 1.DO/TAU
      F(N1,J)   = U(N1,J)/TAU
    END DO
C
    DO I = 2, N1-1
      A1(I,1)   = 1.DO/(H1*H1)
      A1(I-1,1) = 1.DO/(H1*H1)
      AO(I,1)   = A1(I,1) + A1(I-1,1) + A2(I,1) + 1.DO/TAU
      F(I,1)    = U(I,1)/TAU + G(I)/H2
    END DO
C
    DO I = 2, N1-1
      A1(I,N2)  = 1.DO/(H1*H1)
      A1(I-1,N2) = 1.DO/(H1*H1)
      AO(I,N2)  = A1(I,N2) + A1(I-1,N2) + A2(I,N2-1) + 1.DO/TAU
      F(I,N2)   = U(I,N2)/TAU
    END DO
C
      AO(1,1) = A1(1,1) + A2(1,1) + 1.DO/TAU
      F(1,1)  = U(1,1)/TAU + G(1)/H2
C
      AO(N1,1) = A1(N1-1,1) + A2(N1,1) + 1.DO/TAU
      F(N1,1)  = U(N1,1)/TAU + G(N1)/H2
C
      AO(1,N2) = A1(1,N2) + A2(1,N2-1) + 1.DO/TAU
      F(1,N2)  = U(1,N2)/TAU
C
      AO(N1,N2) = A1(N1-1,N2) + A2(N1,N2-1) + 1.DO/TAU
      F(N1,N2)  = U(N1,N2)/TAU
C
    RETURN
  END

```

В подпрограмме FLUX задаются граничные условия второго рода для тестовой прямой задачи (точное решение обратной задачи). В подпрограммах FDS и FDSS формируются коэффициенты разностных схем для основного и сопряженного состояний соответственно.

### 8.3.6. Примеры расчетов

Входные данные для обратной задачи получаются из решения прямой задачи (8.91)–(8.95) при задании граничного условия (8.94) в виде

$$\mu(x_1, t) = x_1 \frac{t}{T}.$$

Прямая задача решается в прямоугольнике  $\Omega$  с  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 0,5$  при  $T = 1$  на сетке  $\omega$  с  $N_1 = N_2 = 50$  и  $\tau = 0,01$ . Результаты решения прямой задачи на моменты времени  $t = 0,25, 0,5, 0,75, 1$  показаны на рис. 8.12–8.15 (с. 430, 431).

Результаты решения прямой задачи в ближайших к  $\gamma_*$  узлах сетки (функция  $\varphi_n(x_1)$  в (8.115)) на те же моменты времени показаны на рис. 8.16 (с. 432). Эти данные случайным образом возмущались и рассматривались как входные при решении обратной задачи:

$$\bar{\varphi}_n(x_1) = \varphi_n(x_1) + 2\delta \left( \sigma(x_1, t_n) - \frac{1}{2} \right), \quad x_1 \in \omega, \quad n = 1, 2, \dots, N_0,$$

где  $\sigma(x_1, t_n)$  — случайная функция, нормально распределенная на интервале  $[0, 1]$ .

Приближенное решение обратной задачи при уровне погрешностей, задаваемых параметром  $\delta = 0,005$ , показано на рис. 8.17 (с. 432). Здесь приведены точные и найденные граничные условия на моменты времени  $t = 0,25, 0,5, 0,75, 1$ . Видно, что на конечный момент времени (при  $t = 1$ ) точность восстановления очень плохая. Да и рассчитывать на что-то другое никак нельзя, так как изменения в граничном режиме на моменты времени вблизи  $t = T$  фактически не сказываются в точках наблюдения (на другой части границы расчетной области) — возмущения практически не доходят до точек наблюдения. Влияние точности задания входных данных прослеживается на рис. 8.18–8.19 (с. 433).

## 8.4. Коэффициентная обратная задача для нелинейного параболического уравнения

Рассматривается обратная задача идентификации коэффициента, зависящего от решения для одномерного параболического уравнения по наблюдениям решения во внутренней точке (точках). Обсуждаются алгоритмы функциональной и параметрической оптимизации. Основное внимание уделяется вопросам построения вычислительных алгоритмов и их реализации.

### 8.4.1. Постановка задачи

Во многих прикладных задачах возникает проблема идентификации коэффициентов уравнения с частными производными. Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений второго порядка типичны для задач тепло- и массопереноса, задач гидрогеологии. Обратные задачи идентификации коэффициентов для линейных уравнений являются нелинейными. Это обстоятельство существенно осложняет проблемы построения вычислительных алгоритмов для приближенного решения

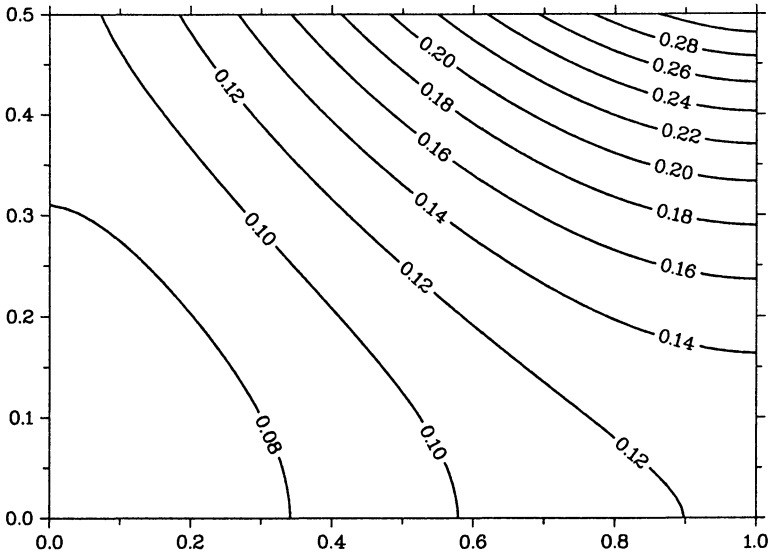


Рис. 8.12. Решение прямой задачи ( $t = 0,25$ )

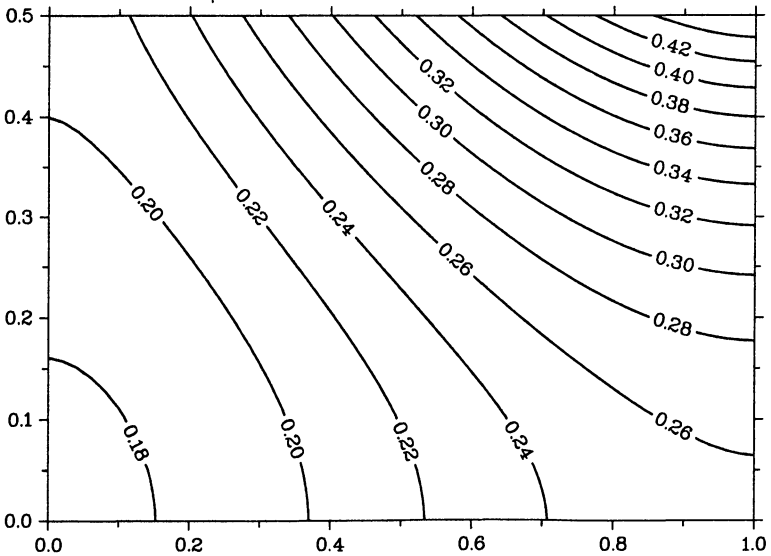
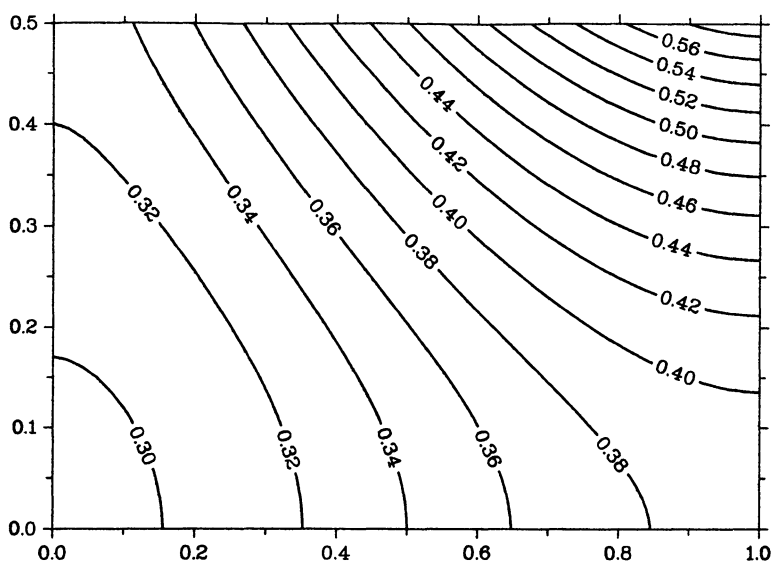
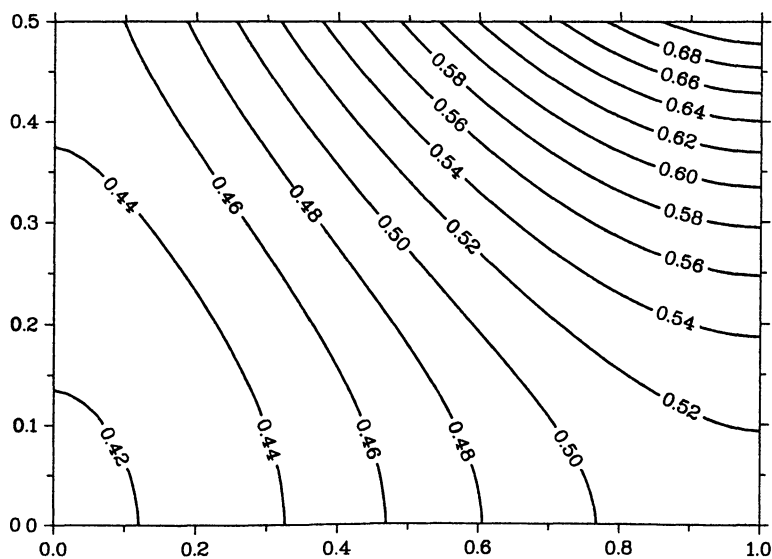


Рис. 8.13. Решение прямой задачи ( $t = 0,5$ )

Рис. 8.14. Решение прямой задачи ( $t = 0,75$ )Рис. 8.15. Решение прямой задачи ( $t = 1$ )

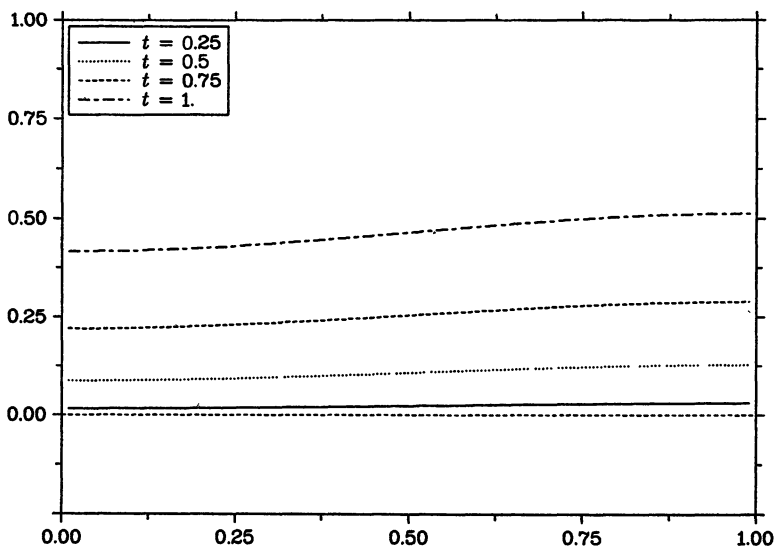
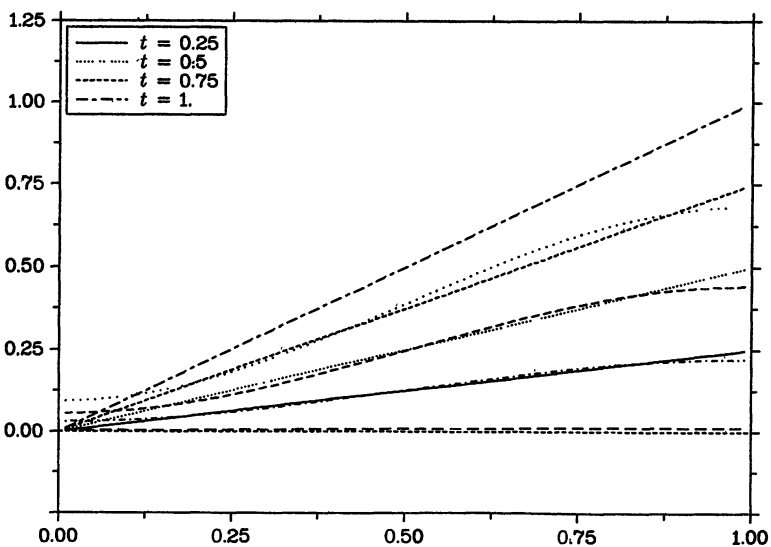
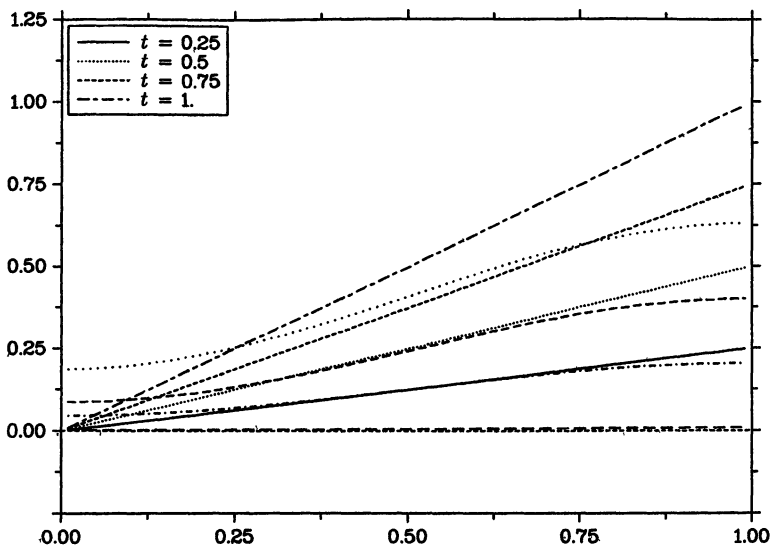
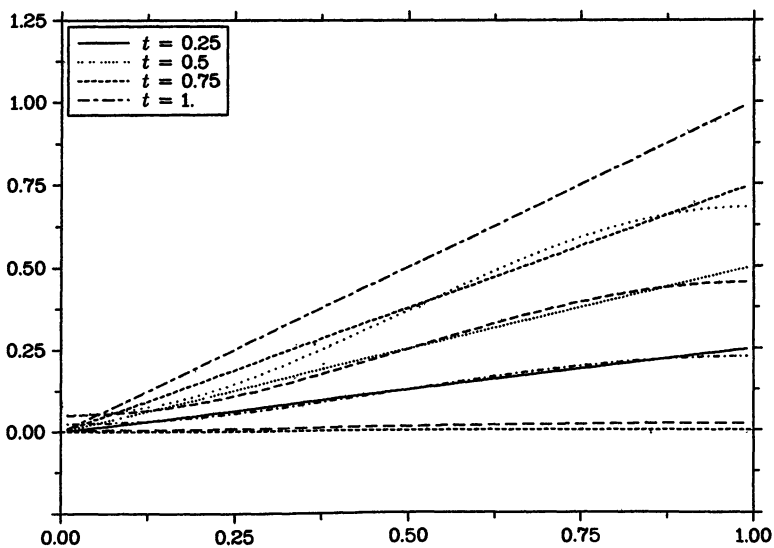


Рис. 8.16. Невозмущенные входные данные для обратной задачи

Рис. 8.17. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,005$

Рис. 8.18. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$ Рис. 8.19. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,0025$

коэффициентных задач, делает практически невозможным полное и строгое обоснование их сходимости. Поэтому упор делается на максимально широкую апробацию численных методов на содержательных примерах решения обратных задач.

Часто наибольший интерес имеют задачи определения нелинейных коэффициентов, зависящих от решения. Сформулируем простейшую задачу этого типа. Пусть в прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T], \quad \bar{\Omega} = \{x \mid 0 \leq x \leq l\}, \quad 0 \leq t \leq T$$

функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad (8.132)$$

Будем считать, что нелинейный коэффициент  $k$  удовлетворяет условию  $k(u) \geq \kappa > 0$ . Рассматривается краевая задача с граничными условиями первого рода

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (8.133)$$

и однородными начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.134)$$

В виде (8.132)–(8.134) формулируется прямая задача.

В коэффициентной обратной задаче зависимость  $k(u)$  неизвестна и ее необходимо найти, например, по дополнительным наблюдениям за решением в некоторых внутренних точках  $z_m \in \Omega$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . С учетом задания этих данных с погрешностью положим

$$u(z_m, t) \approx \varphi_m(t), \quad 0 < t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (8.135)$$

Необходимо найти  $u(x, t)$  и  $k(u)$  из условий (8.132)–(8.135).

При исследовании коэффициентных обратных задач, подобных рассматриваемой задаче (8.132)–(8.135), большое внимание уделяется проблеме единственности решения при точных измерениях. В нашем случае в предположениях о достаточной гладкости коэффициента  $k(u)$  и самого решения достаточно дополнительно потребовать монотонности функции  $g(t)$ . Для определенности, пусть

$$\frac{dg}{dt}(t) > u_{\min} = 0, \quad 0 < t < T, \quad g(0) = 0, \quad g(T) = u_{\max}. \quad (8.136)$$

В обратной задаче (8.132)–(8.135) естественно ставить вопрос об определении функциональной зависимости  $k(u)$  при  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ .

### 8.4.2. Функциональная оптимизация

Для приближенного решения обратной задачи (8.132)–(8.135) можно использовать вариационную формулировку задачи. Будем использовать обозначения

$$K = L_2(u_{\min}, u_{\max}), \quad (k, r)_K = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} k(u)r(u) du, \quad \|k\|_K = \sqrt{(k, k)_K}.$$

При применении градиентных итерационных методов минимизируется функционал невязки, который с учетом (8.135) имеет вид

$$J(k) = \sum_{m=1}^M \int_0^T (u(z_m, t; k) - \varphi_m(t))^2 dt \quad (8.137)$$

при условиях (8.132)–(8.134). В методе регуляризации А. Н. Тихонова минимизируется сглаживающий функционал

$$J_\alpha(k) = \sum_{m=1}^M \int_0^T (u(z_m, t; k) - \varphi_m(t))^2 dt + \alpha \|k\|_K^2.$$

При применении градиентных итерационных методов для минимизации функционала  $J(k)$  необходимо вычислить его градиент. Некоторые осложнения связаны с тем, что рассматриваемый функционал не является квадратичным. Градиент функционала  $J'(k)$  при приращении  $\delta k$  определяется выражением

$$\delta J(k) = (J'(k), \delta k)_K + s,$$

где  $\delta J(k) = J(k + \delta k) - J(k)$  — приращение функционала, а

$$\frac{|s|}{\|\delta k\|_K} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta k \rightarrow 0.$$

Как мы видели раньше, градиент функционала невязки выражается через решение некоторой сопряженной начально-краевой задачи. Наиболее общий подход к формулированию такой задачи связан с рассмотрением задачи условной минимизации функционала невязки на решениях краевой задачи для основного состояния как задачи безусловной минимизации с введением множителей Лагранжа. Применительно к рассматриваемой задаче минимизации (8.137) при ограничениях (8.132)–(8.134)



функционал Лагранжа имеет вид

$$G(k) = J(k) + \int_0^T \int_0^l \psi \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) dx dt, \quad (8.138)$$

где  $\psi(x, t)$  — множители Лагранжа.

Пусть  $\delta G$  — приращение функционала  $G$ , которое соответствует приращению  $\delta k$  и

$$\delta G = \delta J + \delta Q. \quad (8.139)$$

Обозначим через  $\delta u$  приращение  $u$ , тогда для  $\delta J$  получим

$$\delta J = 2 \sum_{m=1}^M \int_0^T \int_0^l \delta u (u - \varphi_m) \delta(x - z_m) dx dt, \quad (8.140)$$

где  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция. Для второго слагаемого в (8.139), отбрасывая члены второго порядка малости, имеем

$$\delta Q = \int_0^T \int_0^l \psi \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) dx dt. \quad (8.141)$$

Для приращений решения из (8.133), (8.134) получим

$$\begin{aligned} \delta u(0, t) = 0, \quad \delta u(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ \delta u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

С учетом этого

$$\int_0^T \int_0^l \psi \frac{\partial \delta u}{\partial t} dx dt = - \int_0^T \int_0^l \delta u \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt,$$

если потребовать

$$\psi(0, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.142)$$

Аналогично при задании граничных условий для  $\psi(x, t)$  в виде

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.143)$$

приходим к равенству

$$\int_0^T \int_0^l \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \int_0^l \delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dt.$$

Кроме того при граничных условиях (8.143)

$$\int_0^T \int_0^l \psi \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt = - \int_0^T \int_0^l \delta k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt.$$

Теперь мы имеем возможность переписать (8.141) в виде

$$\delta Q = \int_0^T \int_0^l \delta u \left( -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) dx dt + \int_0^T \int_0^l \delta k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt. \quad (8.144)$$

Принимая во внимание (8.140) и (8.144), будем определять функцию  $\psi(x, t)$  как решение уравнения

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + 2 \sum_{m=1}^M (u - \varphi_m) \delta(x - z_m) = 0, \quad (8.145)$$

$$0 < x < l, \quad 0 \leq t < T.$$

Тем самым для определения сопряженного состояния решается корректная начально-краевая задача (8.142), (8.143), (8.145).

Из (8.139), (8.144) получим

$$\delta G = \int_0^T \int_0^l \delta k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt.$$

С учетом (8.138) это приращение функционала выражается через  $J'(k)$ :

$$\delta G = (J'(k), \delta k)_K.$$

В расчетной области  $Q_T$  введем новые независимые переменные  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ , для которых якобиан преобразования  $\frac{D(x, t)}{D(u, v)} \neq 0$ . С учетом наших предположений (8.136) о граничном режиме (функции  $g(t)$ ) такое преобразование переменных возможно. В силу этого

$$\int_0^T \int_0^l \delta k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \delta k(u) \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{D(x, t)}{D(u, v)} dv du$$

и поэтому

$$J'(k) = \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{D(x, t)}{D(u, v)} dv, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (8.146)$$

Полученное представление (8.146) не очень удобно использовать при практической реализации, при практическом построении итерационных методов решения коэффициентной обратной задачи (8.132)–(8.135). В этом случае мы имеем достаточно технически сложную процедуру вычисления градиента функционала невязки.

### 8.4.3. Параметрическая оптимизация

При приближенном решении коэффициентных обратных задач особого внимания заслуживают методы параметрической идентификации. В обсуждаемых ранее градиентных методах приближенное решение ищется как функция непрерывного (или дискретного при сеточной аппроксимации) аргумента. Поэтому мы и говорим о функциональной оптимизации. Возможен и другой подход, который можно рассматривать как проекционный метод решения обратных задач, связанный с представлением приближенного решения в параметрическом виде и с нахождением параметров этого представления.

В пространстве функций  $K$  выбирается конечномерное  $K_p$  с базисом  $\eta_\beta(u)$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$ . При приближенном решении коэффициентной обратной задачи (8.132)–(8.135) искомым коэффициент представляется в виде

$$k_p(u) = \sum_{\beta=1}^p a_\beta \eta_\beta(u). \quad (8.147)$$

Неизвестные коэффициенты  $a_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$  подлежат определению при решении обратной задачи.

Реализация алгоритмов параметрической идентификации возможна в двух вариантах. Будем считать, что точность задания входной информации определяется величиной  $\delta$ . В нашей модельной задаче (8.132)–(8.135)

$$u(z_m, t) = \varphi_m^\delta(t), \quad 0 < t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (8.148)$$

$$\sum_{m=1}^M \int_0^T (\varphi_m^\delta(t) - \varphi_m(t))^2 dt \leq MT\delta^2. \quad (8.149)$$

Первый вариант реализации алгоритма параметрической идентификации при решении коэффициентной задачи (8.132)–(8.134), (8.148), (8.149) связан с использованием достаточно большой размерности  $p$  подпространства  $K_p$ , когда погрешность аппроксимации  $k(u)$  функцией  $k_p(u)$  приводит к гораздо меньшим погрешностям решения в точках наблюдения, чем имеющиеся (см. (8.149)). Другими словами, погрешности приближения (8.147) можно не учитывать при решении обратной задачи. Аналогичная ситуация имеет место при сеточной дискретизации обратной

задачи, когда при использовании достаточно подробных расчетных сеток мы не учитываем погрешности, которые обусловлены дискретизацией.

В рассматриваемом случае, как и при функциональной идентификации, регуляризация приближенного решения (8.147) может достигаться минимизацией сглаживающего функционала А. Н. Тихонова для вектора  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ :

$$J_\alpha(\mathbf{a}) = \sum_{m=1}^M \int_0^T (u(z_m, t; \mathbf{a}) - \varphi_m(t))^2 dt + \alpha \sum_{\beta=1}^p a_\beta^2 \quad (8.150)$$

при согласовании параметра регуляризации  $\alpha$  с погрешностью входных данных (с  $\delta$  в (8.149)). Альтернативой может выступать итерационный метод для определения вектора  $\mathbf{a}$ .

Второй вариант реализации алгоритмов параметрической идентификации более полно учитывает специфику параметрической идентификации, когда в качестве параметра регуляризации выступает размерность подпространства  $K_p$  — число элементов в разложении (8.147). Можно говорить о саморегуляризирующих свойствах алгоритма дискретизации (8.147).

В качестве типичного примера (8.147) рассмотрим кусочно-линейную аппроксимацию. Будем считать, что по переменной  $u$  введена равномерная сетка

$$u_\beta = u_{\min} + (\beta - 1) \frac{u_{\max} - u_{\min}}{p - 1}, \quad \beta = 1, 2, \dots, p.$$

В этом случае (см. рис. 8.20) кусочно-линейные финитные функции  $\eta_\beta(u)$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$  задаются в виде

$$\eta_\beta(u) = \begin{cases} 0, & u < u_{\beta-1}, \\ \frac{u - u_{\beta-1}}{u_\beta - u_{\beta-1}}, & u_{\beta-1} < u < u_\beta, \\ \frac{u_{\beta+1} - u}{u_{\beta+1} - u_\beta}, & u_{\beta+1} < u < u_{\beta+1}, \\ 0, & u > u_{\beta+1}, \end{cases} \quad \beta = 2, 3, \dots, p - 1,$$

а коэффициенты  $a_\beta = k_p(u_\beta)$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$ . В качестве параметра регуляризации при таком представлении приближенного решения возьмем шаг сетки по  $u$  (число узлов  $p$ ).

Вычислительные алгоритмы параметрической идентификации (8.147) при применении метода регуляризации (8.150) связаны с задачей минимизации функции  $p$  переменных  $J_\alpha(\mathbf{a})$ . Сформулируем необходимое условие

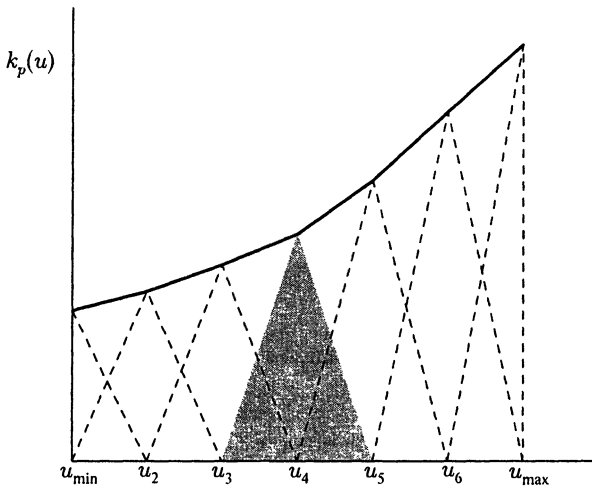


Рис. 8.20. Кусочно-линейное приближение

минимума, которое можно использовать при построении численных алгоритмов для нахождения параметров  $a_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$ . Непосредственно из (8.150) имеем

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial a_\beta} = 2 \sum_{m=1}^M \int_0^T (u(z_m, t; \mathbf{a}) - \varphi_m(t)) \frac{\partial u}{\partial a_\beta} dt + 2\alpha a_\beta. \quad (8.151)$$

Из (8.132)–(8.134) и представления (8.147) для  $\frac{\partial u}{\partial a_\beta}$  получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta_\beta(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (8.152)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (8.153)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.154)$$

Для получения более удобного представления для первого члена в правой части (8.151) формулируется краевая задача для сопряженного состояния. Пусть функция  $\psi(x, t)$  при известном  $u(x, t)$  есть решение краевой задачи (8.142), (8.143), (8.145). Домножая уравнение (8.152) на  $\psi(x, t)$  и интегрируя по  $x$  и  $t$ , прямыми вычислениями получим

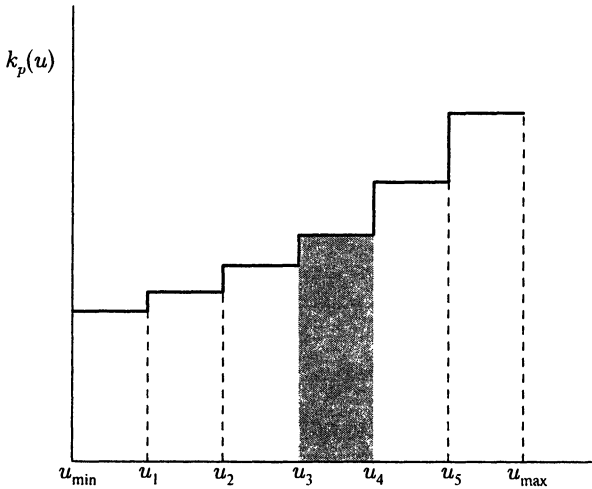


Рис. 8.21. Кусочно-постоянное приближение

искомую систему уравнений

$$\int_0^T \int_0^l \eta_\beta(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt + 2\alpha a_\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \quad (8.155)$$

На основе (8.155) можно строить вычислительные алгоритмы. В частности, можно ориентироваться на итерационные методы определения параметров  $a_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, p$ . Необходимо при этом учитывать осложняющий фактор, который связан с нелинейной зависимостью основного состояния от искомого коэффициента ( $u(x, t)$  от  $k(u) = k_p(u)$ ).

В условиях монотонности граничных режимов типа (8.136) можно строить алгоритмы последовательной идентификации. Аналогичная процедура локальной регуляризации обсуждалась нами выше при рассмотрении эволюционных обратных задач по восстановлению начального условия и граничных режимов. В случае (8.132)–(8.136) при каждом  $t \leq t_* < T$  можно найти зависимость  $k(u)$  при  $u \leq g(t_*)$ . Наиболее просто проводится учет таких особенностей рассматриваемой коэффициентной задачи при параметрической оптимизации (8.147) в классе кусочно-постоянных функций. В этом случае (см. также рис. 8.21) при использовании равномерной сетки

$$u_\beta = u_{\min} + \beta \frac{u_{\max} - u_{\min}}{p}, \quad \beta = 0, 1, \dots, p,$$

пробные функции задаются в виде

$$\eta_{\beta}(u) = \begin{cases} 0, & u < u_{\beta-1}, \\ 1, & u_{\beta-1} \leq u \leq u_{\beta}, \\ 0, & u > u_{\beta}, \end{cases} \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \quad (8.156)$$

При такой параметризации при  $u_{\beta-1} \leq u \leq u_{\beta}$  необходимо найти только один числовой параметр  $a_{\beta}$ , при этом параметры  $a_{\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, \beta - 1$ , определены ранее. Подобная процедура возможна не только при кусочно-постоянном восполнении неизвестного коэффициента, но и при использовании других аппроксимаций (8.147), например, при кусочно-линейной (рис. 8.20).

#### 8.4.4. Сеточная задача

Рассмотрим проблемы использования алгоритма параметрической оптимизации в варианте локальной регуляризации при приближенном решении коэффициентной обратной задачи (8.132)–(8.135). При предположениях (8.136) задачу идентификации коэффициента  $k(u)$  будем решать в классе (8.147), (8.156).

Начнем с построения сеточного аналога прямой задачи (8.132)–(8.134). По времени введем простейшую равномерную сетку

$$\bar{\omega}_{\tau} = \omega_{\tau} \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\}$$

с шагом  $\tau > 0$ . Для приближенного решения на момент времени  $t = t_n$  используем обозначения  $y_n(x) = y(x, t_n)$ .

С равномерной сеткой по времени свяжем неравномерную сетку по  $u$ . С учетом (8.133), (8.136) определим

$$g_n = g(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, N_0,$$

$$u_{\min} = g_0 < g_1 < \dots < g_{n-1} < g_n < \dots < g_{N_0} = u_{\max}.$$

По этим данным строится искомая более грубая сетка по  $u$ :

$$u_{\beta} = u_{\beta-1} + N_0^{(\beta)} \tau, \quad u_0 = u_{\min}, \quad u_p = u_{\max}, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \quad (8.157)$$

Тем самым между узлами  $u_{\beta-1}$  и  $u_{\beta}$  делается  $N_0^{(\beta)}$  шагов по времени.

Обозначим через  $\bar{\omega}$  равномерную сетку с шагом  $h$  на интервале  $\bar{\Omega} = [0, l]$ :

$$\bar{\omega} = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\},$$

где  $\omega$  — множество внутренних узлов, а  $\partial\omega$  — множество граничных узлов. Определим сеточный оператор

$$A(v)y = -(d(v)y_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega.$$

Коэффициент  $d(v)$  будем задавать, например, в виде

$$d(v) = k(0,5(v(x) + v(x - h))),$$

$$d(v) = \frac{1}{2}(k(v(x - h)) + k(v(x))).$$

Уравнению (8.132) во внутренних узлах сетки по пространству поставим в соответствие чисто неявную разностную схему

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_{n+1})y_{n+1} = 0, \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (8.158)$$

Аппроксимация краевых условий (8.133) дает

$$y_{n+1}(0) = 0, \quad y_{n+1}(l) = g_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (8.159)$$

Начальному условию (8.134) соответствует

$$y_0 = 0, \quad x \in \omega. \quad (8.160)$$

Более подробно вопросы построения, вычислительной реализации разностных схем для приближенного решения прямых начально-краевых задач типа (8.132)–(8.134) обсуждались ранее в главе 4. Нас сейчас интересует вопрос о том, как, базируясь на разностной схеме (8.158)–(8.160), строить вычислительные алгоритмы численного решения коэффициентной обратной задачи (8.132)–(8.134).

При использовании кусочно-постоянной аппроксимации (8.147), (8.156), (8.157) неизвестного коэффициента  $k(u)$  можно ориентироваться на использование пошаговой идентификации. Будем считать, что приближение для нелинейного коэффициента при  $0 \leq u < u_{\beta-1}$  нам известно. Найдено также и разностное решение до соответствующего момента времени. Будем искать решение обратной задачи при  $u_{\beta-1} \leq u < u_{\beta}$ .

Обозначим через  $L^{(\beta)}$  номер слоя по времени, который соответствует достижению решения  $u_{\beta}$ . Принимая во внимание (8.157), получим

$$L^{(\beta)} = \sum_{\gamma=1}^{\beta} N_0^{(\gamma)}, \quad L^{(0)} = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p.$$

При решении обратной задачи известно решение  $y_l$ ,  $0 \leq l \leq L^{(\beta-1)}$ , а также искомым коэффициент  $k_u$  до этого же момента времени (при  $0 < u < u_{\beta-1}$  в соответствии с (8.147), (8.156), (8.157)).

Далее решается разностная задача

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_{n+1})y_{n+1} = 0, \quad x \in \omega,$$

$$n = L^{(\beta-1)} + 1, L^{(\beta-1)} + 2, \dots, L^{(\beta)}, \quad (8.161)$$



$$\begin{aligned}
 y_{n+1}(0) &= 0, \quad y_{n+1}(l) = g_{n+1}, \\
 n &= L^{(\beta-1)} + 1, L^{(\beta-1)} + 2, \dots, L^{(\beta)}.
 \end{aligned}
 \tag{8.162}$$

В этом случае неизвестным является только коэффициент  $a_\beta$ . Для его определения привлекается имеющаяся дополнительная информация (см. (8.148), (8.149)).

Будем считать, что точки наблюдения  $z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  являются некоторыми внутренними узлами расчетной сетки по пространству. В качестве критерия близости приближенного решения в этих точках к измеренным при решении задачи (8.161), (8.162) в соответствии с (8.148) естественно взять

$$J^{(\beta)} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=L^{(\beta-1)}+1}^{L^{(\beta)}} (y_n(z_m) - \varphi_m^\delta(t_n))^2 \tau.
 \tag{8.163}$$

С учетом того, что  $J^{(\beta)} = J^{(\beta)}(a_\beta)$ , параметр  $a_\beta$  находится из минимума функции  $J^{(\beta)}(a_\beta)$ . При вычислительной реализации для нахождения минимума (8.163) можно применить стандартные методы минимизации функции одной переменной (золотого сечения, парабол и др.).

При рассматриваемой локальной регуляризации согласование с погрешностью задания входных данных может осуществляться путем выбора интервала  $[u_{\beta-1}, u_\beta]$  (выбора  $N_0^{(\beta)} = L^{(\beta)} - L^{(\beta-1)}$  в (8.161), (8.162)). Принимая во внимание (8.149) в соответствии с принципом невязки и будем выбирать максимальное  $N_0^{(\beta)}$ , для которого

$$J^{(\beta)} \leq M N_0^{(\beta)} \delta^2.
 \tag{8.164}$$

В некоторых критических случаях соотношение (8.164) может не выполняться ни при каких  $N_0^{(\beta)}$ , тогда нам остается выбрать  $N_0^{(\beta)} = 1$ .

### 8.4.5. Программа

Вычислительный алгоритм последовательного определения нелинейного коэффициента  $k(u)$  реализован в программе PROBLEM18. Отметим некоторые ее основные особенности.

Временной интервал делится на  $p = 2^\nu$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, \nu_{\max}$ , равные части (при  $N_0 = 2^{\nu_{\max}}$ ). Сгущение прекращается при достижении заданного уровня невязки или при условии, что дальнейшее сгущение приводит к ее увеличению. Для приближенного решения нелинейного уравнения по определению константы применяется метод золотого сечения.

## Программа PROBLEM18

```

C
C  PROBLEM18 - КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C  КВАЗИЛИНЕЙНОЕ 1D ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  PARAMETER ( DELTA = 0.02D0, N = 100, M = 128 )
  DIMENSION    X(N+1), Y(N+1), Y1(N+1), YT(N+1),
+              U(N+1,M+1), AKS(M+1), PHI(M+1), PHID(M+1),
+              BR(M+1), UL(M+1),
+              A(N+1), B(N+1), C(N+1), F(N+1),
+              ALPHA(N+2), BETA(N+2)
C
C  ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C  XL, XR      - ЛЕВЫЙ И ПРАВЫЙ КОНЕЦ ОТРЕЗКА;
C  N + 1      - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C  M + 1      - ЧИСЛО УЗЛОВ СЕТКИ ПО ВРЕМЕНИ;
C  XD         - ТОЧКА НАБЛЮДЕНИЯ;
C  PHI(M+1)   - ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ;
C  PHID(M+1)  - ВОЗМУЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ;
C
  XL = 0.D0
  XR = 1.D0
  TMAX = 1.D0
  XD = 0.6D0
  EPSA = 1.D-4
  EPSH = 1.D-4
C
C  OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C  СЕТКА
C
  H = (XR - XL) / N
  TAU = TMAX / M
  DO I = 1, N+1
    X(I) = XL + (I-1)*H
  END DO
C
C  БЛИЖАЙШИЙ К ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ XD УЗЕЛ СЕТКИ
C
  ND = (XD-XL) / H + 1
  IF ((XD-XL - (ND-1)*H).GT.0.5*H) ND = ND + 1
C
C  ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C  ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ
C
  DO K = 1, M
    T = K*TAU
    BR(K) = AG(T)
  END DO
C

```

```

C   НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
      T = 0.DO
      DO I = 1, N+1
          Y(I) = 0.DO
          U(I,1) = Y(I)
      END DO

C   НОВЫЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЙ
C
      DO K = 1, M
          T = K*TAU

C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СХЕМА
C
      DO I = 2, N
          U1 = (Y(I) + Y(I-1)) / 2
          U2 = (Y(I+1) + Y(I)) / 2
          A(I) = AK(U1) / (H*H)
          B(I) = AK(U2) / (H*H)
          C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
          F(I) = Y(I) / TAU
      END DO

C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ
C
      B(1) = 0.DO
      C(1) = 1.DO
      F(1) = 0.DO

C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОМ КОНЦЕ
C
      A(N+1) = 0.DO
      C(N+1) = 1.DO
      F(N+1) = AG(T)

C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
      CALL PROG ( N+1, A, C, B, F, ALPHA, BETA, Y )
      DO I = 1, N + 1
          U(I,K+1) = Y(I)
      END DO
END DO

C   РЕШЕНИЕ В ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ
C
      DO K = 1, M+1
          PHI(K) = U(ND,K)
          PHID(K) = PHI(K)
      END DO

C   ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C

```

```

C
  DO K = 2, M+1
    PHID(K) = PHI(K) + 2.*DELTA*(RAND(0)-0.5)
  END DO
C
C  ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C
C  ВЫБОР ШАГА КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ АППРОКСИМАЦИИ
C
  L = 1
100 CONTINUE
  ML = M / L
  DO LK = 1, L+1
    T = (LK-1)*ML*TAU
    UL(LK) = AG(T)
  END DO
C
C  НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
C
  T = 0.DO
  SD = 0.DO
  DO I = 1, N+1
    Y1(I) = 0.DO
  END DO
  DO LK = 1, L
C
C  ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА НА ПОДИНТЕРВАЛЕ
C  ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ
C
    AS = 0.1DO
    BS = 10.DO
    R1 = (DSQRT(5.0DO)-1.DO)/2
    R2 = R1**2
    HS = BS - AS
C
C  РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОДИНТЕРВАЛЕ ПРИ ЗАДАННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ
C
    CALL STEPВ ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, ВЕТ,
+              Y, Y1, AS, AKS, UL, PHID, YA )
    CALL STEPВ ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, ВЕТ,
+              Y, Y1, BS, AKS, UL, PHID, YB )
    CS = AS + R2*HS
    DS = AS + R1*HS
    CALL STEPВ ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, ВЕТ,
+              Y, Y1, CS, AKS, UL, PHID, YC )
    CALL STEPВ ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, ВЕТ,
+              Y, Y1, DS, AKS, UL, PHID, YD )
    KS = 0
200 KS = KS + 1
    IF (YC.LT.YD) THEN
      BS = DS
      YB = YD
      DS = CS

```

```

      YD = YC
      HS = BS - AS
      CS = AS + R2*HS
      CALL STEPB ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, BET,
+           Y, Y1, CS, AKS, UL, PHID, YC )
      ELSE
      AS = CS
      YA = YC
      CS = DS
      YC = YD
      HS = BS - AS
      DS = AS + R1*HS
      CALL STEPB ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, BET,
+           Y, Y1, DS, AKS, UL, PHID, YD )
      END IF
      IF (DABS(YB-YA).GT.EPSA.OR.HS.GT.EPSH) GO TO 200
C
C   НАЙДЕННОЕ РЕШЕНИЕ
C
      PS = AS
      YP = YA
      IF (YB.LT.YA) THEN
      PS = BS
      YP = YB
      ENDIF
      DO I = 1, N+1
      Y1(I) = Y(I)
      END DO
C
C   СУММАРНАЯ НЕВЯЗКА
C
      SD = SD + YP
      END DO
      WRITE( 01,* ) L, KS, SD
C
C   ВЫХОД ПО НЕВЯЗКЕ
C
      L = L*2
      IF (L.EQ.2) THEN
      SDO = SD
      IF (SD.GT.TMAX*DELTA**2 .AND. L .LE. M) GO TO 100
      ELSE
      IF (SD.LT.SDO) THEN
      IF (SD.GT.TMAX*DELTA**2 .AND. L .LE. M) GO TO 100
      END IF
      END IF
C
C   ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ В ФАЙЛ
C
      WRITE ( 01, * ) ((U(I,K),I=1,N+1), K=1,M+1)
      WRITE ( 01, * ) (PHI(K), K=1,M+1)
      WRITE ( 01, * ) (PHID(K), K=1,M+1)
      WRITE ( 01, * ) (AKS(K), K=1,M+1)

```

```

CLOSE ( 01 )
STOP
END

C
SUBROUTINE PROG ( N, A, C, B, F, AL, BET, Y )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C   МЕТОД ПРОГОНКИ
C
DIMENSION A(N), C(N), B(N), F(N), Y(N), AL(N+1), BET(N+1)

C
AL(1) = B(1) / C(1)
BET(1) = F(1) / C(1)
DO I = 2, N
    SS = C(I) - AL(I-1)*A(I)
    AL(I) = B(I) / SS
    BET(I) = (F(I) + BET(I-1)*A(I) ) / SS
END DO
Y(N) = BET(N)
DO I = N-1, 1, -1
    Y(I) = AL(I)*Y(I+1) + BET(I)
END DO
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AK ( U )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C   КОЭФФИЦИЕНТ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ
C
AK = 0.5D0 + U

C
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AG ( T )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОМ КОНЦЕ
C
AG = T

C
RETURN
END

C
SUBROUTINE STEPВ ( N, ND, M, ML, LK, H, TAU, A, C, B, F, AL, BET,
+
    Y, Y1, AK, AKS, UL, PHI, FD )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )

C
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗКИ НА ПОДИНТЕРВАЛЕ
C   ПРИ ЗАДАННОМ ПОСТОЯННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

```

```

C
+   DIMENSION A(N+1), C(N+1), B(N+1), F(N+1), Y(N+1), Y1(N+1),
+       ALPHA(N+2), BETA(N+2), PHI(M+1), AKS(M+1), UL(M+1)
C
    AKS(LK+1) = AK
    FD = 0.DO
    DO I = 1, N+1
        Y(I) = Y1(I)
    END DO
    T = (LK-1)*ML*TAU
    DO K = 1, ML
        T = T + TAU
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C   ЧИСТО НЕЯВНАЯ СХЕМА
C
    DO I = 2, N
        U1 = (Y(I) + Y(I-1)) / 2
        U2 = (Y(I+1) + Y(I)) / 2
        A(I) = AFK(U1, LK+1, UL, AKS, M) / (H*H)
        B(I) = AFK(U2, LK+1, UL, AKS, M) / (H*H)
        C(I) = A(I) + B(I) + 1.DO / TAU
        F(I) = Y(I) / TAU
    END DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ЛЕВОМ КОНЦЕ
C
    B(1) = 0.DO
    C(1) = 1.DO
    F(1) = 0.DO
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ НА ПРАВОМ КОНЦЕ
C
    A(N+1) = 0.DO
    C(N+1) = 1.DO
    F(N+1) = AG(T)
C
C   РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА НОВОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
C
    CALL PROG ( N+1, A, C, B, F, ALPHA, BETA, Y )
C
C   НЕВЯЗКА В ТОЧКЕ НАБЛЮДЕНИЯ
C
    FD = FD + (Y(ND) - PHI((LK-1)*ML+K+1))*2*TAU
    END DO
    RETURN
    END

DOUBLE PRECISION FUNCTION AFK ( U, L, UL, AL, M )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
    DIMENSION UL(M+1), AL(M+1)

```

```

C
C      КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ
C
      AFK = AL(2)
      DO IL = 2, L
        IF (U.LE.U(L) .AND. U.GT.U(L-1)) AFK = AL(IL)
      END DO
C
      RETURN
      END

```

В подпрограмме-функции АК задается нелинейный коэффициент при решении прямой задачи, данные по которой рассматриваются как входные при решении обратной задачи. В подпрограмме-функции АГ определены граничные условия на правой границе. Кусочно-постоянное восполнение осуществляется в АФК.

#### 8.4.6. Примеры расчетов

Для задания входных данных решается прямая задача при  $l = 1$ ,  $T = 1$  на равномерной сетке  $h = 0,01$ ,  $\tau = 2^{-7}$ . Используется простейшая линейризованная разностная схема, когда нелинейный коэффициент

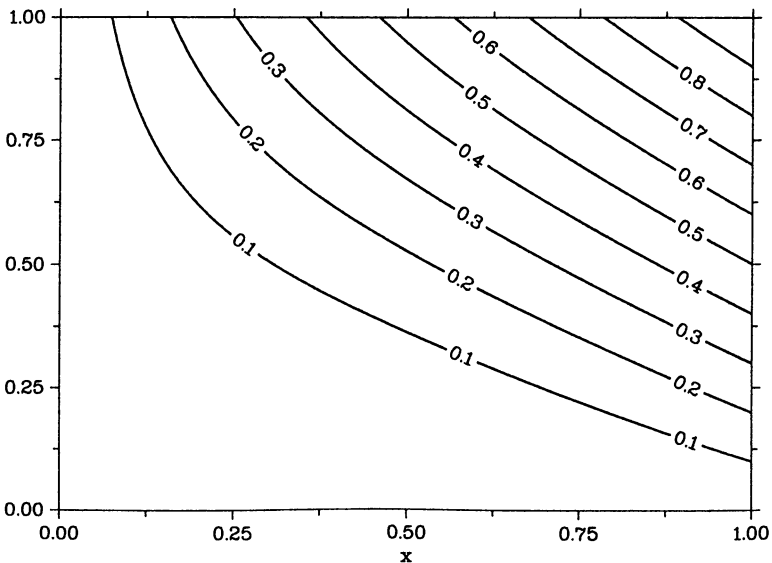


Рис. 8.22. Решение прямой задачи



берется с предыдущего временного слоя, т. е.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A(y_n)y_{n+1} = 0, \quad x \in \omega, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Ниже приведены данные расчетов, когда точное решение соответствует выбору

$$k(u) = 0,5 + u,$$

тем самым искомым коэффициент меняется в три раза в расчетной области. Решение прямой задачи показано на рис. 8.22.

При решении обратной задачи мы ограничились только одной точкой наблюдения, причем

$$z_1 = 0,3, \quad M = 1, \quad \varphi_1(t_n) = y_n(z_1), \quad n = 1, 2, \dots, N_0,$$

где  $y_n(x)$  — сеточное решение прямой задачи. Эти данные возмущались нормально распределенной функцией:

$$\varphi_1^\delta(t_n) = \varphi_1(t_n) + 2\delta \left( \sigma(t_n) - \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N_0.$$

Решение обратной задачи при уровне погрешностей, задаваемых параметром  $\delta = 0,02$ , показано на рис. 8.23. С учетом задания граничного режима в виде  $g(t) = t$  на одном графике приведены точные и приближенные входные данные для обратной задачи (решение в точке

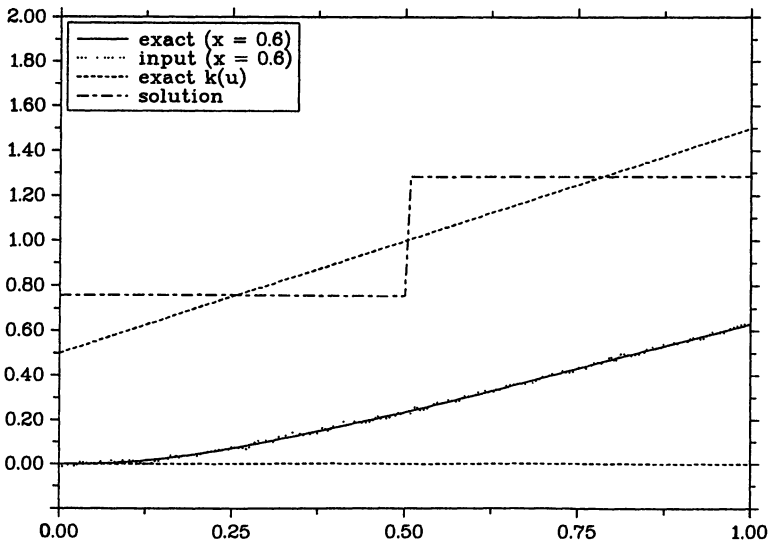


Рис. 8.23. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,02$

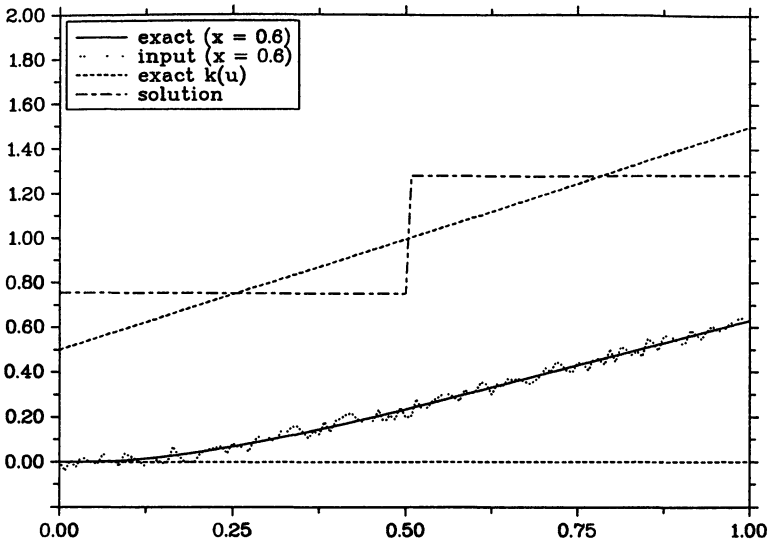


Рис. 8.24. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,04$

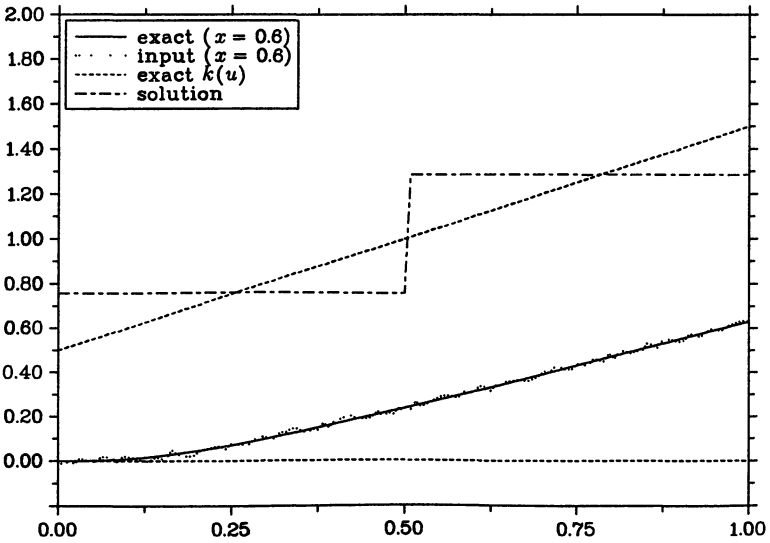


Рис. 8.25. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

$x = z_1 = 0,6$ ) и искомым коэффициент  $k(u)$ . При выбранном уровне погрешностей для восстановления коэффициента достаточно два подинтервала ( $p = 2$  в (8.147), (8.156)). Влияние погрешностей зримо прослеживается на рис. 8.24 и 8.25.

## 8.5. Коэффициентная обратная задача для эллиптического уравнения

Рассматривается задача определения младшего коэффициента в эллиптическом уравнении второго порядка по данным на границе расчетной области. Предполагается, что неизвестный коэффициент не зависит от одной переменной. На таком простейшем примере иллюстрируются возможности исследования единственности коэффициентных обратных задач. Вычислительный алгоритм строится для модельной задачи в прямоугольнике.

### 8.5.1. Постановка задачи

Задача рассматривается в простейшем случае, когда расчетная область является прямоугольником:

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Для отдельных частей границы прямоугольника  $\Omega$  используются обозначения (см. рис. 8.26)

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4.$$

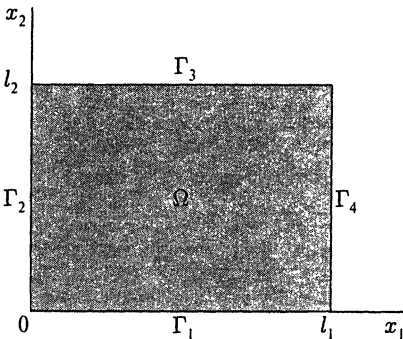


Рис. 8.26. Расчетная область

Как обычно, начнем с формулировки прямой задачи. Будем считать, что функция  $u(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u + c(x_2)u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (8.165)$$

где

$$\Delta u \equiv \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}.$$

Уравнение (8.165) дополняется граничными условиями первого рода:

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (8.166)$$

В прямой задаче (8.165), (8.166) младший коэффициент предполагается зависящим только от переменной  $x_2$ .

В рассматриваемой обратной задаче коэффициент  $c(x_2)$  неизвестен. Он определяется по некоторым дополнительным данным. Будем рассматривать случай, когда дополнительные данные получены из измерений на границе области в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.167)$$

где  $n$  — внешняя по отношению к  $\Omega$  нормаль.

Ранее мы рассматривали линейную обратную задачу по определению неизвестной правой части, которая не зависит от одной переменной. Поставленная обратная задача (8.165)–(8.167) по определению пары функций  $\{u(\mathbf{x}), c(x_2)\}$  является более сложной. Проблемы ее исследования порождены в значительной степени нелинейностью этой обратной задачи.

### 8.5.2. О единственности решения обратной задачи

Можно говорить об определенной переопределенности рассматриваемой коэффициентной обратной задачи. В задаче (8.165)–(8.167) идентификация неизвестного коэффициента  $c(x_2)$  соответствует определению функции одной переменной на интервале  $(0, l_1)$  по двум функциям переменной  $x_2$  (функция  $\psi(\mathbf{x})$  на сторонах  $\Gamma_2, \Gamma_4$ ) и двум функциям переменной  $x_1$  (функция  $\psi(\mathbf{x})$  на сторонах  $\Gamma_1, \Gamma_3$ ). Поэтому в общем плане можно было бы ставить вопрос о достаточных дополнительных данных для определения коэффициента  $c(x_2)$ .

Для исследования единственности обратной задачи (8.165)–(8.167) используется обычный подход, который применяется как для прямых нелинейных краевых задач математической физики, так и для нелинейных обратных задач. Предположим, что существуют два решения обратной задачи (8.165)–(8.167), которые мы обозначим  $\{u_\beta(\mathbf{x}), c_\beta(x_2), \beta = 1, 2\}$ , т. е.

$$-\Delta u_\beta + c_\beta(x_2)u_\beta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.168)$$

$$u_\beta(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.169)$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial n}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \beta = 1, 2. \quad (8.170)$$

Для разностей

$$v(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}),$$

$$\theta(x_2) = c_1(x_2) - c_2(x_2)$$

из (8.168)–(8.170) имеем

$$-\Delta v + c_1(x_2)v + \theta(x_2)u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.171)$$

$$v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.172)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (8.173)$$

Мы докажем единственность решения обратной задачи (8.165)–(8.167), если покажем, что (8.171)–(8.173) будет верно только при  $v(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\theta(\mathbf{x}_2) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Задача (8.171)–(8.173) рассматривается при заданных  $c_1(\mathbf{x}_2)$  и  $u_2(\mathbf{x})$ . Это есть обратная задача (но уже линейная) по определению пары  $v(\mathbf{x})$ ,  $\theta(\mathbf{x}_2)$  — задача идентификации правой части. Сформулируем некоторые достаточные условия, при которых можно гарантировать  $v(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\theta(\mathbf{x}_2) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Помимо обычных предположений о гладкости решения и коэффициента будем считать, что в (8.165)–(8.167) решение  $u(\mathbf{x})$  является знакопостоянной функцией, например,

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Это условие обеспечивается (принцип максимума) предположениями

$$c(\mathbf{x}_2) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \psi(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

При таких ограничениях из (8.171) получим уравнение составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{u_2} (-\Delta v + c_1(\mathbf{x}_2)v) \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8.174)$$

Необходимо показать, что решение краевой задачи (8.172)–(8.174) есть  $v(\mathbf{x}) = 0$ . Тогда из (8.171) сразу же вытекает ( $u_2 > 0$ ), что и  $\theta(\mathbf{x}_2) = 0$ .

Домножим уравнение (8.174) на некоторую функцию  $\eta(\mathbf{x})$ , для которой

$$\eta(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.175)$$

и проинтегрируем его по всей области  $\Omega$ . С учетом (8.175) получим

$$\int_{\Omega} w (-\Delta v + c_1(\mathbf{x}_2)v) dx = 0, \quad (8.176)$$

где использованы обозначения

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{u_2(\mathbf{x})} \frac{\partial \eta(\mathbf{x})}{\partial x_1}.$$

Принимая во внимание однородные граничные условия (8.172), (8.173), из (8.176) имеем

$$\int_{\Omega} (-\Delta w + c_1(\mathbf{x}_2)w)v dx = 0.$$

Из этого равенства будет следовать  $v(x) = 0$ ,  $x \in \Omega$ , если мы покажем, что мы можем выбрать  $\eta(x)$  так, чтобы

$$-\Delta w + c_1(x_2)w = v(x), \quad x \in \Omega. \quad (8.177)$$

Применительно к рассматриваемой расчетной области (рис. 8.26) рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения (8.177) со смешанными краевыми условиями

$$w(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \quad (8.178)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \quad (8.179)$$

С существованием решения стандартной краевой задачи (8.177)–(8.179) вопросов не возникает. В более общих задачах можно ориентироваться на использование результатов о существовании решения задачи для уравнения (8.177), когда краевые условия заданы в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

— краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с заданной косой производной на границе.

Осталось только указать вид функции  $\eta(x)$ . По найденной из (8.177)–(8.179) функции  $w(x)$  для этого решается краевая задача

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{u_2(x)} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x), \quad x \in \Omega,$$

с граничными условиями (8.175).

### 8.5.3. Сеточная обратная задача

Сформулируем разностный аналог коэффициентной обратной задачи (8.165)–(8.167). В  $\Omega$  введем равномерную по каждому направлению сетку с шагами  $h_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Определим множество внутренних узлов сетки

$$\omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_\beta = i_\beta h_\beta, i_\beta = 1, 2, \dots, N_\beta - 1, N_\beta h_\beta = l_\beta, \beta = 1, 2\},$$

и пусть  $\partial\omega$  — множество граничных узлов. Обозначим через  $\partial\omega^*$  — множество приграничных узлов, т. е.

$$\partial\omega^* = \{x \mid x \in \omega, x_\beta = h_\beta, x_\beta = l_\beta - h_\beta, \beta = 1, 2\}.$$

Аппроксимируем вначале прямую задачу (8.165), (8.166). Для внутренних узлов определим двумерный стандартный разностный оператор Лапласа  $\Lambda$  на пятиточечном шаблоне:

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \omega.$$

Краевой задаче (8.165), (8.166) ставится в соответствие разностная задача Дирихле

$$-\Delta y + c(x_2)y = 0, \quad x \in \omega, \quad (8.180)$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\omega. \quad (8.181)$$

В обратной задаче сеточная функция  $c(x_2)$ ,  $x_2 \in \omega_2$ , неизвестна, но заданы дополнительные условия, которые соответствуют (8.167). При переходе к дискретной задаче дополнительные условия можно сопоставить с заданием сеточного решения в узлах  $\partial\omega^*$ . Это имеет место при использовании простейших аппроксимаций направленными разностями (погрешность аппроксимации имеет первый порядок). Аналогичная ситуация имеет место и при применении аппроксимаций граничного условия (8.167) со вторым порядком. В качестве иллюстрации рассмотрим аппроксимацию краевых условий на  $\Gamma_2$ .

Для приграничного узла имеем

$$\frac{u(h_1, x_2) - u(0, x_2)}{h_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0, x_2) + O(h_1^2). \quad (8.182)$$

С учетом граничных условий (8.166), (8.167) приходим к выражению

$$y(h_1, x_2) = \varphi(h_1, x_2) - h_1 \psi(h_1, x_2).$$

Использование этого выражения соответствует аппроксимации краевых условий (8.167) с первым порядком. Более высокий (второй) порядок аппроксимации достигается на решениях краевой задачи (8.165), (8.166). В этом случае из (8.165) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0, x_2) = \Delta u(0, x_2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(0, x_2) = c(x_2)\varphi(0, x_2) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0, x_2).$$

Принимая во внимание (8.182) для приграничных узлов можно положить

$$y(h_1, x_2) = \varphi(h_1, x_2) - h_1 \psi(h_1, x_2) + c(x_2)\varphi(0, x_2) - \varphi_{\bar{x}_2 x_2}(0, x_2).$$

Однако такие аппроксимации при решении обратной задачи нам не очень подходят, так как в этом случае значение в приграничном узле зависит от неизвестного (искомого) коэффициента  $c(x_2)$ . Поэтому будем использовать простейшие аппроксимации первого рода для того, чтобы сформулировать дополнительные условия в виде

$$y(x) = \phi(x), \quad x \in \partial\omega^*. \quad (8.183)$$

При решении прикладных задач входные данные задаются с погрешностью. Будем считать, что на фоне этих погрешностей погрешностями аппроксимации можно пренебречь (используются достаточно подробные

расчетные сетки). В нашем примере (8.165)–(8.167) ограничимся случаем, когда основные погрешности вносятся измерениями нормальной производной на границе. Поэтому при приближенном решении обратной задачи с погрешностями во входных данных граничное условие (8.181) оставим без изменения, а вместо (8.183) положим

$$y(x) \approx \phi_\delta(x), \quad x \in \partial\omega^*, \quad (8.184)$$

где параметр  $\delta$  задает уровень погрешностей.

#### 8.5.4. Итерационное решение обратной задачи

Для приближенного решения обратной задачи (8.180), (8.181), (8.184) будем использовать градиентные итерационные методы. В этом случае искомая сеточная функция  $c(x_2)$  уточняется на каждом итерационном шаге исходя из критерия минимизации функционала невязки (точности выполнения условия (8.184)).

Определим невязку в виде

$$J(c) = \sum_{x \in \partial\omega^*} (y(x) - \phi_\delta(x))^2 h(x), \quad (8.185)$$

где

$$h(x) = \begin{cases} h_1, & x_2 = h_2, l_2 - h_2, \quad x_1 \neq h_1, l_1 - h_1, \\ h_2, & x_1 = h_1, l_1 - h_1, \quad x_2 \neq h_2, l_2 - h_2, \\ \frac{1}{2}(h_1 + h_2), & x_1 = h_1, l_1 - h_1, \quad x_2 = h_2, l_2 - h_2. \end{cases}$$

Будем считать, что искомая функция  $c(x_2)$  принадлежит пространству сеточных функций  $L_2(\omega_2)$ , в котором для скалярного произведения и нормы используются обозначения

$$(c, d) = \sum_{x_2 \in \omega_2} c(x_2)d(x_2)h_2, \quad \|c\| = \sqrt{(c, c)}.$$

При получении выражения для градиента функционала  $J(c)$  примем, что приращению  $\delta c$  соответствуют приращения  $\delta J$  и  $\delta y$  для функционала (8.185) и решения задачи (8.180), (8.181).

С точностью до членов второго порядка малости из (8.180), (8.181) получим

$$-\Lambda \delta y + c(x_2)\delta y + \delta c y = 0, \quad x \in \omega, \quad (8.186)$$

$$\delta y(x) = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (8.187)$$

Для приращения функционала невязки непосредственно имеем

$$\delta J(c) = 2 \sum_{x \in \partial\omega^*} (y(x) - \phi_\delta(x)) \delta y h(x). \quad (8.188)$$



Градиент функционала  $J'(c)$  соответствует представлению приращения функционала в виде

$$\delta J(c) = (J'(c), \delta c).$$

Для того чтобы преобразовать правую часть (8.188), домножим уравнение (8.186) на некоторую сеточную функцию  $\xi(x)h_1h_2$ ,  $x \in \omega$ , и просуммируем его по всем узлам  $\omega$ :

$$\sum_{x \in \omega} \xi(x) (-\Lambda \delta y + c(x_2) \delta y + \delta c y) h_1 h_2 = 0. \quad (8.189)$$

Будем считать, что

$$\xi(x) = 0, \quad x \in \partial\omega. \quad (8.190)$$

При таких ограничениях из (8.189) следует

$$\sum_{x \in \omega} \delta y (-\Lambda \xi + c(x_2) \xi) h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega} \delta c y \xi h_1 h_2 = 0. \quad (8.191)$$

Для получения представления для  $J'(c)$  первый член (8.191) связывается с правой частью равенства (8.188).

Пусть функция  $\xi(x)$  определяется как решение уравнения

$$-\Lambda \xi + c(x_2) \xi = -F(x), \quad x \in \omega. \quad (8.192)$$

Здесь правая часть  $F(x)$  имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_2} (y(x) - \phi_\delta(x)), & x_2 = h_2, l_2 - h_2, \quad x_1 \neq h_1, l_1 - h_1, \\ \frac{2}{h_1} (y(x) - \phi_\delta(x)), & x_1 = h_1, l_1 - h_1, \quad x_2 \neq h_2, l_2 - h_2, \\ \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} (y(x) - \phi_\delta(x)), & x_1 = h_1, l_1 - h_1, \quad x_2 = h_2, l_2 - h_2, \\ 0, & x \in \omega, \quad x \notin \partial\omega^*. \end{cases}$$

При таком задании правой части из (8.188), (8.191), (8.192) получим

$$\delta J(c) = \sum_{x \in \omega} \delta c y \xi h_1 h_2 = \sum_{x_2 \in \omega_2} \delta c \left( \sum_{x_1 \in \omega_1} y \xi h_1 \right) h_2.$$

В силу этого для градиента функционала имеем представление

$$J'(c) = \sum_{x_1 \in \omega_1} y \xi h_1, \quad x_2 \in \omega. \quad (8.193)$$

Его вычисление связано с решением краевой задачи (8.180), (8.181) для основного состояния (сеточная функция  $y(x)$ ) и краевой задачи (8.190), (8.192) для сопряженного состояния (сеточная функция  $\xi(x)$ ).

При использовании двухслойного градиентного итерационного метода уточнение  $c^k(x_2)$ ,  $k$  — номер итерации, проводится по схеме

$$\frac{c^{k+1} - c^k}{s_{k+1}} + J'(c^k) = 0, \quad x_2 \in \omega_2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8.194)$$

Необходимо только учитывать, что решаемое уравнение  $J'(c) = 0$  является нелинейным. Для выхода из итерационного процесса (8.194) можно использовать критерий невязки.

### 8.5.5. Программа

Описанный градиентный метод реализован нами в простейшем варианте, когда итерационный параметр  $s_{k+1}$  постоянный (метод простой итерации). При возмущении входных данных моделируется ситуации с возмущениями в граничном условии второго рода (8.167).

#### Программа PROBLEM19

```

C
C   PROBLEM19 - ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА
C               ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
C               ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
C
C   IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C   PARAMETER ( DELTA = 0.02D0, N1 = 51, N2 = 51 )
C   DIMENSION A(12*N1*N2), X1(N1), X2(N2), СК(N2), GR(N2),
+           YG1(N1), YG2(N2), YG3(N1), YG4(N2),
+           YD1(N1), YD2(N2), YD3(N1), YD4(N2),
+           YY1(N1), YY2(N2), YY3(N1), YY4(N2)
C   COMMON / SB5 / IDEFAULT(4)
C   COMMON / CONTROL / IREPT, NITER
C
C   ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:
C
C   X1L, X2L - КООРДИНАТЫ ЛЕВОГО УГЛА;
C   X1R, X2R - КООРДИНАТЫ ПРАВОГО УГЛА;
C   N1, N2   - ЧИСЛО УЗЛОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКИ;
C   H1, H2   - ШАГИ СЕТКИ ПО ПРОСТРАНСТВУ;
C   TAU      - ШАГ ПО ВРЕМЕНИ;
C   DELTA    - УРОВЕНЬ ПОГРЕШНОСТИ ВО ВХОДНЫХ ДАННЫХ;
C   СК(N2)   - ВОССТАНАВЛИВАЕМЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ;
C   YG1(N1),
C   YG2(N2),
C   YG3(N1),
C   YG4(N2)  - СЕТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ В ПРИГРАНИЧНЫХ УЗЛАХ;
C   YD1(N1),

```

```

C   YD2(N2),
C   YD3(N1),
C   YD4(N2) - ВОЗМУЩЕННАЯ СЕТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ В ПРИГРАНИЧНЫХ УЗЛАХ;
C   EPSR    - ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C   EPSA    - АБСОЛЮТНАЯ ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ;
C
C   EQUIVALENCE (A(1),      AO      ),
C   *           (A(N+1),    A1      ),
C   *           (A(2*N+1),  A2      ),
C   *           (A(9*N+1),  F       ),
C   *           (A(10*N+1), U       );
C   *           (A(11*N+1), US     )
C
C   X1L = 0.DO
C   X1R = 1.DO
C   X2L = 0.DO
C   X2R = 1.DO
C   EPSR = 1.D-6
C   EPSA = 1.D-9
C   SS = - 40.DO
C
C   OPEN ( 01, FILE = 'RESULT.DAT' ) ! ФАЙЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РАСЧЕТОВ
C
C   СЕТКА
C
C   H1 = (X1R-X1L) / (N1-1)
C   H2 = (X2R-X2L) / (N2-1)
C   DO I = 1, N1
C     X1(I) = X1L + (I-1)*H1
C   END DO
C   DO J = 1, N2
C     X2(J) = X2L + (J-1)*H2
C   END DO
C
C   N = N1*N2
C   DO I = 1, 12*N
C     A(I) = 0.DO
C   END DO
C
C   ПРЯМАЯ ЗАДАЧА
C
C   ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
C
C   CALL BNG ( A(10*N+1), X1, X2, N1, N2 )
C
C   МЛАДШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ
C
C   DO J = 1, N2
C     СК(J) = АС(X2(J))
C   END DO
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C

```

```

CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), СК, A(9*N+1), A(10*N+1),
+         H1, H2, N1, N2 )
C
C РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
IDEFAULT(1) = 0
IREPT       = 0
CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
C
C РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЯ
C
CALL BNGDER ( A(10*N+1), H1, H2, N1, N2, YG1, YG2, YG3, YG4 )
C
C ВОЗМУЩЕНИЕ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН
C
DO I = 2, N1-1
  H = H2
  IF (I.EQ.2 .OR. I.EQ.N1-1) H = (H1+H2) / 2.DO
  YD1(I) = YG1(I) + 2.*H*DELTA*(RAND(0)-0.5)
  YD3(I) = YG3(I) + 2.*H*DELTA*(RAND(0)-0.5)
END DO
DO J = 2, N2-1
  H = H1
  IF (J.EQ.2 .OR. J.EQ.N2-1) H = (H1+H2) / 2.DO
  YD2(J) = YG2(J) + 2.*H*DELTA*(RAND(0)-0.5)
  YD4(J) = YG4(J) + 2.*H*DELTA*(RAND(0)-0.5)
END DO
C
C ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
C ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД
C
IT = 0
C
C НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
DO J = 1, N2
  СК(J) = 0.DO
END DO
C
100 IT = IT + 1
C
C ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ
C
C КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ
C
CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), СК, A(9*N+1), A(10*N+1),
+         H1, H2, N1, N2 )
C
C РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
IDEFAULT(1) = 0
IREPT       = 0
CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(10*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )

```

```

C
C   РЕШЕНИЕ В ТОЧКАХ НАБЛЮДЕНИЯ
C
C   CALL BNGDER ( A(10*N+1), H1, H2, N1, N2, YY1, YY2, YY3, YY4 )
C
C   СОПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
C
C   КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C
C   CALL FDS ( A(1), A(N+1), A(2*N+1), CK, A(9*N+1), A(10*N+1),
+           H1, H2, N1, N2 )
C
C   ПРАВАЯ ЧАСТЬ
C
C   CALL RHS ( A(9*N+1), N1, N2, H1, H2, YD1, YD2, YD3, YD4,
+           YY1, YY2, YY3, YY4 )
C
C   РЕШЕНИЕ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ
C
C   IDEFAULT(1) = 0
C   IREPT       = 0
C   CALL SBAND5 ( N, N1, A(1), A(11*N+1), A(9*N+1), EPSR, EPSA )
C
C   МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ
C
C   ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА
C
C   CALL GRAD ( A(10*N+1), A(11*N+1), H1, H2, N1, N2, GR )
C
C   НОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
C
C   DO J = 2, N2-1
C       CK(J) = CK(J) + SS*GR(J)
C   END DO
C
C   ВЫХОД ИЗ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПО НЕВЯЗКЕ
C
C   SUM = 0.DO
C   SUMD = 0.DO
C   DO I = 3, N1-2
C       SUM = SUM + (YD1(I) - YY1(I))**2 * H1
C       SUM = SUM + (YD3(I) - YY3(I))**2 * H1
C   END DO
C   SUMD = SUMD + 2.DO*(N1-4)*H1*H2*DELTA**2
C   DO J = 3, N2-2
C       SUM = SUM + (YD2(J) - YY2(J))**2 * H2
C       SUM = SUM + (YD4(J) - YY4(J))**2 * H2
C   END DO
C   SUMD = SUMD + 2.DO*(N2-4)*H1*H2*DELTA**2
C   SUM = SUM + (YD1(2) - YY1(2))**2 * (H1+H2) / 2.DO
C   SUM = SUM + (YD4(2) - YY4(2))**2 * (H1+H2) / 2.DO
C   SUM = SUM + (YD3(2) - YY3(2))**2 * (H1+H2) / 2.DO
C   SUM = SUM + (YD3(N1) - YY3(N1))**2 * (H1+H2) / 2.DO

```

```

SUMD = SUMD + 2.DO*(H1+H2)*DELTA**2
IF (SUM.GT.SUMD) GO TO 100
C
C РЕШЕНИЕ
C
WRITE ( 01, * ) (A(10*N+I), I=1,N)
WRITE ( 01, * ) (CK(J), J=1,N2)
CLOSE ( 01 )
STOP
END
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION AC ( X2 )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
C
C МЛАДШИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
C
AC = 10.DO*X2
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE FDS ( A0, A1, A2, CK, F, U, H1, H2, N1, N2 )
C
C ФОРМИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ
C ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
C
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION A0(N1,N2), A1(N1,N2), A2(N1,N2),
+ CK(N2), F(N1,N2), U(N1,N2)
C
DO J = 2, N2-1
DO I = 2, N1-1
A1(I-1,J) = 1.DO/(H1*H1)
A1(I,J) = 1.DO/(H1*H1)
A2(I,J-1) = 1.DO/(H2*H2)
A2(I,J) = 1.DO/(H2*H2)
A0(I,J) = A1(I,J) + A1(I-1,J) + A2(I,J) + A2(I,J-1) + CK(J)
F(I,J) = 0.DO
END DO
END DO
C
C ОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
C
DO J = 2, N2-1
A0(1,J) = 1.DO
A1(1,J) = 0.DO
A2(1,J) = 0.DO
F(1,J) = U(1,J)
F(2,J) = F(2,J) + U(1,J) / (H1*H1)
END DO
C
DO J = 2, N2-1
A0(N1,J) = 1.DO

```

```

      A1(N1-1,J) = 0.DO
      A1(N1,J)   = 0.DO
      A2(N1,J)   = 0.DO
      F(N1,J)    = U(N1,J)
      F(N1-1,J) = F(N1-1,J) + U(N1,J) / (H1*H1)
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  A0(I,1) = 1.DO
  A1(I,1) = 0.DO
  A2(I,1) = 0.DO
  F(I,1)  = U(I,1)
  F(I,2)  = F(I,2) + U(I,1) / (H2*H2)
END DO
C
DO I = 2, N1-1
  A0(I,N2) = 1.DO
  A1(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2) = 0.DO
  A2(I,N2-1) = 0.DO
  F(I,N2)   = U(I,N2)
  F(I,N2-1) = F(I,N2-1) + U(I,N2) / (H2*H2)
END DO
C
  A0(1,1) = 1.DO
  A1(1,1) = 0.DO
  A2(1,1) = 0.DO
  F(1,1)  = U(1,1)
C
  A0(N1,1) = 1.DO
  A2(N1,1) = 0.DO
  F(N1,1)  = U(N1,1)
C
  A0(1,N2) = 1.DO
  A1(1,N2) = 0.DO
  F(1,N2)  = U(1,N2)
C
  A0(N1,N2) = 1.DO
  F(N1,N2)  = U(N1,N2)
C
RETURN
END
C
SUBROUTINE RHS ( F, N1, N2, H1, H2, YD1, YD2, YD3, YD4,
+              YY1, YY2, YY3, YY4 )
C
C   ПРАВАЯ ЧАСТЬ В УРАВНЕНИИ ДЛЯ СОПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  DIMENSION F(N1,N2), YD1(N1), YD2(N2), YD3(N1), YD4(N2),
+          YY1(N1), YY2(N2), YY3(N1), YY4(N2)
C
  DO I = 1, N1

```

```

      DO J = 1,N2
        F(I,J) = 0.DO
      END DO
    END DO
    DO I = 3, N1-2
      F(I,2) = 2.DO*(YD1(I) - YY1(I)) / H2
      F(I,N1-1) = 2.DO*(YD3(I) - YY3(I)) / H2
    END DO
    DO J = 3, N2-2
      F(2,J) = 2.DO*(YD2(J) - YY2(J)) / H1
      F(N2-1,J) = 2.DO*(YD4(J) - YY4(J)) / H1
    END DO
    F(2,2) = (H1+H2)* (YD1(2) - YY1(2)) / (H1*H2)
    F(2,N2-1) = (H1+H2)* (YD4(2) - YY4(2)) / (H1*H2)
    F(N1-1,2) = (H1+H2)* (YD3(2) - YY3(2)) / (H1*H2)
    F(N1-1,N2-1) = (H1+H2)* (YD3(N1) - YY3(N1)) / (H1*H2)
C
    RETURN
  END
C
  SUBROUTINE BNG ( U, X1, X2, N1, N2 )
C
C   ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПЕРВОГО РОДА
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  DIMENSION U(N1,N2), X1(N1), X2(N2)
  DO I = 1, N1
    DO J = 1, N2
      U(I,J) = 1.DO + X1(I)
    END DO
  END DO
C
  RETURN
  END
C
  SUBROUTINE BNGDER ( U, H1, H2, N1, N2, YD1, YD2, YD3, YD4 )
C
C   СЕТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ В ПРИГРАНИЧНЫХ УЗЛАХ
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  DIMENSION U(N1,N2), YD1(N1), YD2(N2), YD3(N1), YD4(N2)
  DO I = 2, N1-1
    YD1(I) = U(I,2)
    YD3(I) = U(I,N2-1)
  END DO
  DO J = 2, N2-1
    YD2(J) = U(2,J)
    YD4(J) = U(N1-1,J)
  END DO
C
  RETURN
  END
C

```



```

SUBROUTINE GRAD ( U, XI, N1, N2, N1, N2, GR )
C
C   СЕТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ В ПРИГРАНИЧНЫХ УЗЛАХ
C
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
  DIMENSION U(N1,N2), XI(N1,N2), GR(N2)
  DO J = 2, N2-1
    SUM = 0.D0
    DO I = 2, N1-1
      SUM = SUM + U(I,J)*XI(I,J)*N1
    END DO
    GR(J) = SUM
  END DO
C
  RETURN
END

```

При решении прямой задачи коэффициент  $c(x_2)$  задается в подпрограмме-функции AC. В подпрограмме BNG задается граничное условие (8.166). Коэффициенты сеточного уравнения формируются в подпрограмме FDS. Сеточная задача для сопряженного состояния (8.190), (8.192) отличается от сеточной задачи для основного состояния (8.180), (8.181) только правой частью и граничными условиями (см. подпрограмму RHS).

### 8.5.6. Результаты расчетов

Входные данные при решении задачи идентификации младшего коэффициента брались из решения прямой задачи (8.165), (8.166) в единичном квадрате  $\Omega$  ( $l_1 = l_2 = 1$ ), в которой

$$c(x_2) = 10x_2, \quad \varphi(x) = 1 + x_1.$$

Задача решалась на равномерной сетке с  $h_1 = h_2 = 0,02$ . Линии уровня для разностного решения с шагом 0,05 показаны на рис. 8.27.

Из приближенного решения прямой задачи выделяются значения в приграничных узлах расчетной сетки — задаются условия вида (8.183). Эти входные данные для обратной задачи возмущаются некоторой случайной функцией. Моделируется ситуация, когда граничное условие первого рода (см. (8.166)) задано точно, а дополнительные граничные условия второго рода (см. (8.167)) заданы с погрешностью. В этих условиях, например, в ближайших к границе  $\Gamma_2$  приграничных узлах

$$y(h_1, x_2) = \phi_\delta((h_1, x_2)) = \phi((h_1, x_2)) + 2h_1\delta\left(\sigma(h_1, x_2) - \frac{1}{2}\right),$$

где

$$\phi((h_1, x_2)) = \varphi(h_1, x_2) - h_1\psi(h_1, x_2),$$

а  $\sigma(h_1, x_2)$  — случайная функция.

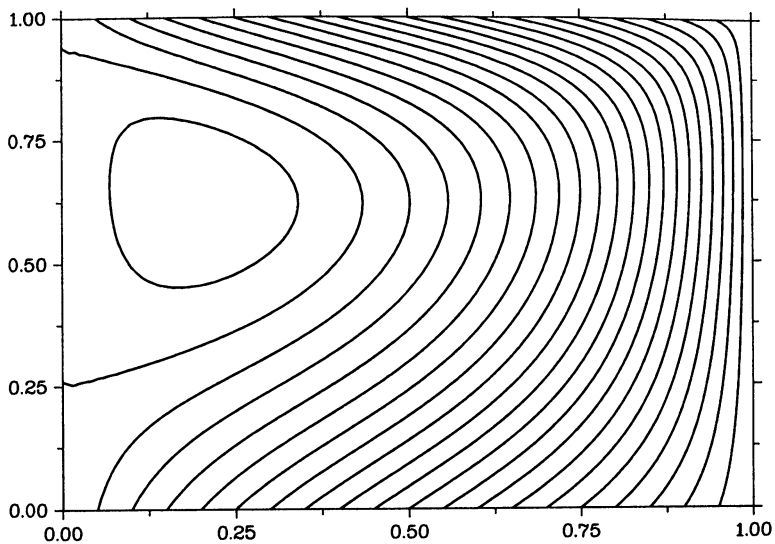
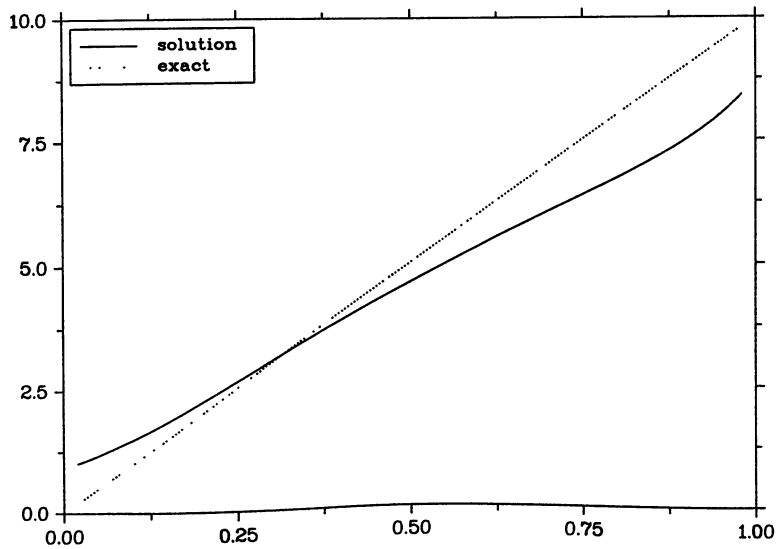


Рис. 8.27. Решение прямой задачи

Рис. 8.28. Восстановление коэффициента при  $\delta = 0,02$

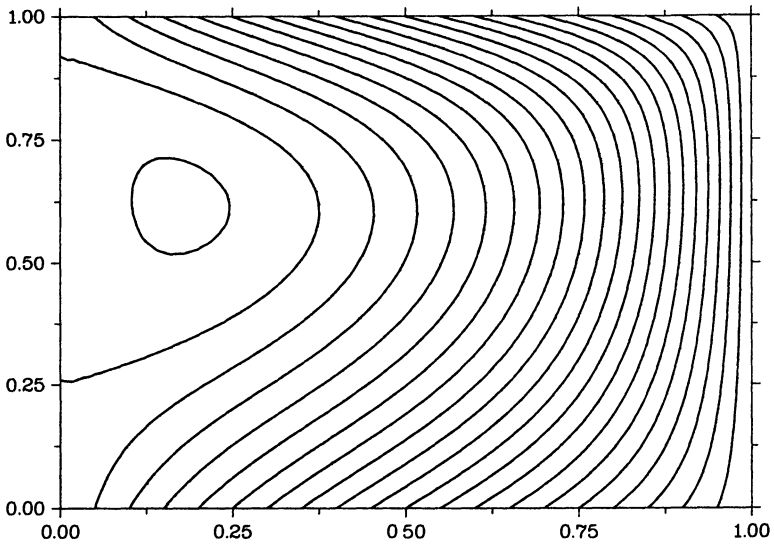


Рис. 8.29. Линии уровня для решения обратной задачи при  $\delta = 0,02$

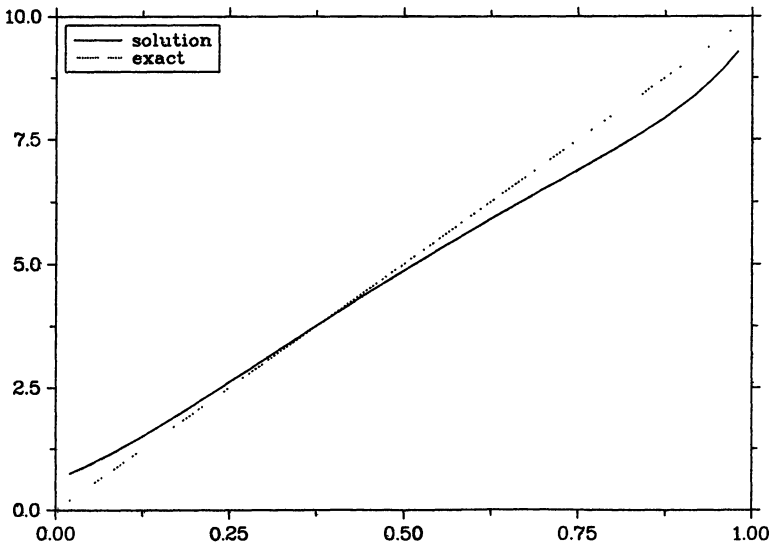
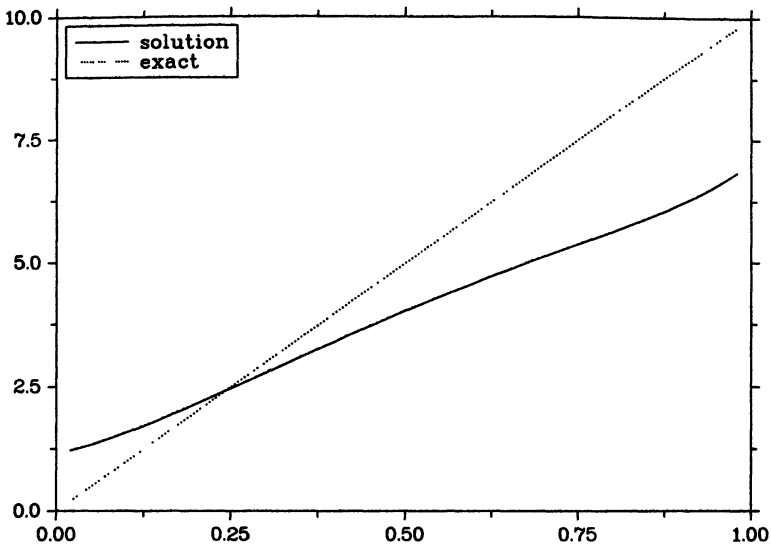


Рис. 8.30. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,01$

Рис. 8.31. Решение обратной задачи при  $\delta = 0,04$ 

Результаты по восстановлению коэффициента при уровне погрешностей  $\delta = 0,02$  приведены на рис. 8.28. Соответствующее решение прямой задачи с таким коэффициентом показано на рис. 8.29. Влияние погрешностей прослеживается на рис. 8.30 и рис. 8.31 (уменьшение и увеличение погрешностей в два раза соответственно).

## 8.6. Задачи и упражнения

**8.1.** Рассмотрите вопросы применения метода квазиобращения при продолжении по пространственной переменной, когда решается граничная обратная задача в прямоугольнике

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$

для двумерного параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\beta^2} = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T,$$

$$u(0, x_2, t) = \varphi(x_2, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, t) = 0,$$

$$u(x_1, 0, t) = 0, \quad u(x_1, l_2, t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega.$$

**8.2.** Исследуйте сходимость разностной схемы (8.43) при приближенном решении задачи Коши (8.12), (8.13), (8.25).

**8.3.** На основе программы PROBLEM15 напишите программу для реализации метода квазиобращения в варианте, когда решается уравнение

$$\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T.$$

Проведите сравнительный анализ вариантов метода квазиобращения при приближенном решении модельных задач.

**8.4.** При использовании метода регуляризации А. Н. Тихонова для приближенного решения граничной обратной задачи для одномерного параболического уравнения минимизируется функционал

$$J_\alpha(v) = \int_0^T (u(o, t) - \varphi_\delta(t))^2 dt + \alpha \int_0^T v^2(t) dt$$

при ограничениях

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(l, t) = v(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Получите условия оптимальности для этой задачи оптимального управления (уравнение Эйлера).

**8.5.** Исследуйте устойчивость в равномерной норме разностной схемы (8.79)–(8.82) при решении задачи с нелокальным граничным условием.

**8.6.** В программе PROBLEM16 предусмотрите возможность сеточного сглаживания входных данных для выделения более гладкого решения обратной задачи. Проведите численные эксперименты по исследованию параметра сглаживания на точность приближенного решения модельных обратных задач.

**8.7.** Постройте градиентный итерационный метод для приближенного решения граничной обратной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T,$$

$$k(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

при уточнении граничного условия (функции  $v(t)$ ) на правой границе:

$$u(l, t) = v(t), \quad 0 < t \leq T.$$

**8.8.** Постройте аддитивную разностную схему (схему расщепления) по пространственным переменным для реализации метода с нелокальным возмущением граничного условия при решении граничной обратной задачи в прямоугольнике  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\beta}} \right) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, t) &= 0, \quad u(0, x_2, t) + \alpha u(l_1, x_2, t) = \varphi(x_2, t), \\ u(x_1, 0, t) &= 0, \quad u(x_1, l_2, t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(x, t) &= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

**8.9.** В программе PROBLEM17 реализован алгоритм итерационного уточнения граничного условия второго рода. Модифицируйте эту программу для реализации алгоритма итерационного уточнения граничного условия третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \sigma u(x, t) = \mu(x_1, t), \quad x \in \gamma.$$

Проведите вычислительные эксперименты по исследованию влияния числового параметра  $\sigma \geq 0$ .

**8.10.** Пусть в задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

коэффициент  $k(x, t)$  является кусочно-постоянным, но граница раздела сред неизвестна. В представлении

$$k(x, t) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \gamma(t), \\ k_2, & \gamma(t) < x < l \end{cases}$$

постоянные  $k_{\beta}$ ,  $\beta = 1, 2$  заданы, а функция  $\gamma(t)$  подлежит определению по дополнительным наблюдениям за решением во внутренних точках

$z_m \in \Omega$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ :

$$u(z_m, t) \approx \varphi_m(t), \quad 0 < t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Рассмотрите возможность построения градиентных итерационных методов для приближенного решения этой коэффициентной обратной задачи.

**8.11.** Рассмотрите возможности последовательной идентификации (локальная регуляризация) нелинейного коэффициента  $k(u)$  при приближенном решении обратной задачи (8.132)–(8.136) при использовании параметрической идентификации (8.147) в классе кусочно-линейных функций.

**8.12.** Модифицируйте программу PROBLEM18, используя градиентный итерационный метод для определения кусочно-постоянного коэффициента  $k(u)$  вместо метода золотого сечения для минимизации функционала невязки на отдельном подинтервале. Сравните вычислительную эффективность этих подходов на примерах решения модельных задач.

**8.13.** Рассмотрите вопрос о единственности решения коэффициентной обратной задачи по нахождению пары функций  $\{u(x), k(x_2)\}$  из условий

$$\sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( k(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

**8.14.** Рассмотрите на сеточном уровне сформулированную в предыдущем задании коэффициентную обратную задачу. Получите градиент функционала невязки, считая, что граничные условия первого рода точно заданы, а граничные условия второго рода — приближенно.

**8.15.** С использованием программы PROBLEM19 проведите численные эксперименты по определению младшего коэффициента  $c(x_2)$  уравнения (8.165) при дополнительной информации не на всей границе  $\partial\Omega$ , а ее отдельных частях (сторонах  $\Gamma_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, 3, 4$ ).

# Литература

1. *Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
2. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
3. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
4. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
5. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
6. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
7. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
8. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
9. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
10. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.
11. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
12. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
13. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
14. *Морозов В. А.* Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
15. *Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
16. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
17. *Романов В. Г., Кабаняхин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
18. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
19. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
20. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.,* Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: URSS, 2003.
21. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Разностные методы решения обратных задач математической физики // *Фундаментальные основы математического моделирования.* М.: Наука, 1997. С. 5–97.



22. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 3-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ/URSS», 2009.
23. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
24. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
25. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
26. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
27. Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
28. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики, 6-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
29. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations // Applied Mathematical Sciences. Vol. 127. Springer-Verlag, 1997.
30. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 231. Marcel Dekker, 2000.
31. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003.

# Предметный указатель

## Алгоритм

- Томаса 44
  - для пятидиагональной матрицы 187
- решения эволюционных задач
  - глобальный 199
  - локальный 199

## Выбор параметра регуляризации

- квазиоптимальный 156
- оптимальный 154
- по невязке 155

## Граничные условия

- первого рода 13
- третьего рода 13

## Задача

- корректная 15
- некорректная 21
- обратная 25
  - граничная 27
  - коэффициентная 26
  - ретроспективная 28
  - эволюционная 28
- прямая 25
- условно корректная 23

## Каноническая форма

- двухслойного итерационного метода 74
- трехслойного итерационного метода 79

## Коэффициентная устойчивость 18

## Лемма

- Гронуолла 17
- разностная 113

## Метод

- Гаусса 46
- баланса 38
- декомпозиции расчетной области 67
- интегро-интерполяционный 38
- итерационный 74
  - Якоби 80
  - вариационный 78
  - двухслойный 74
  - минимальных поправок 79
  - простой итерации 76
  - скорейшего спуска 78
  - сопряженных градиентов 79
  - стационарный 76
  - трехслойный 74
  - чебышевский 77
- квазиобращения 270
- конечного объема 38
- конечных элементов 36
- прогонки 44
  - для пятидиагональной матрицы 187
- регуляризации А. Н. Тихонова 147
- упрощенной регуляризации 150
- фиктивных областей 66

## Неравенство Фридрихса 28

- разностное 41
- многомерное 68

## Область

- нерегулярная 65
- регулярная 65

## Оператор

- перехода 112
- регуляризирующий 147
- факторизованный 82

- П**араметр регуляризации 147  
Перебуславливатель 80  
Принцип  
    максимума 20  
    для параболического уравнения 29  
    разностный 49  
    обобщенной невязки 183  
Прямая сумма пространств 121
- Р**азностная производная  
    левая 33  
    правая 33  
    центральная 33  
Разностная схема  
    двухслойная 109  
    каноническая форма 112  
    консервативная 37  
    монотонная 49  
    с весами 110  
    трехслойная 110  
    каноническая форма 119  
    устойчивость 112  
    по начальным данным 112  
    по правой части 113  
     $\rho$ -устойчивость 113  
Разностная формула Грина  
    вторая 40  
    первая 40
- С**етка  
    неструктурированная 65
- равномерная 33  
структурированная 65
- У**равнение  
    Пуассона 13  
    гиперболическое второго порядка 14  
    конвекции-диффузии 48  
    с доминированием диффузии 48  
    с доминированием конвекции 48  
    обыкновенное второго порядка 13  
    параболическое второго порядка 14  
    эллиптическое второго порядка 13
- У**стойчивость  
    по начальным данным 18  
    по правой части 18
- Ф**ункционал  
    невязки 146  
    сглаживающий 147  
    стабилизирующий 147
- Ф**ункция  
    поверочная 36  
    пробная 36
- Ч**исло Пекле 48  
    сеточное 51